

# 一类埃博拉传染病模型的最优控制

韦爱举 焦萌倩 文艳姑

桂林信息科技学院 广西桂林 541004

**摘要：**对于埃博拉病毒，我们研究探讨了对动物采取控制措施的最优控制问题，证明了最优控制的存在性，利用庞特里亚金极大值原理给出了最优控制策略的表达形式。最后通过数值模拟验证了最优控制策略的优越性，从而说明了在埃博拉疾病的传播过程中对动物采取控制具有重要意义。

**关键词：**埃博拉病毒；庞特里亚金极大值原理；最优控制

## 1 引言

埃博拉病毒是一种人畜共患的疾病<sup>[1,2]</sup>，埃博拉是通过密切接触到感染动物的血液、分泌物、器官或其它体液而传到人，随后通过人际间传播加以蔓延，人群易感者既可以通过破损皮肤或粘膜直接接触感染者的血液、分泌物、器官或其它体液的方式感染该疾病，也可以通过接触受到这些液体污染的表面和材料（如床上用品、衣物）等方式感染<sup>[1]</sup>，在以往对于埃博拉病毒的研究中，有针对动物模型或人类群体中的疾病流行情况进行的实验数据分析和拟合、预测病情趋势、通过基本再生数的分析来研究疾病的预防效果<sup>[3-6]</sup>，也有在人类群体中考虑建立仓室模型来研究埃博拉的动力学和最优控制问题<sup>[7-8]</sup>，却没有同时考虑在人类群体和动物群体中建立仓室模型的最优控制问题。为此，本文研究了埃博拉传染病同时存在人类和动物群体时的控制问题。

文章结构如下：第二节引入埃博拉传染病的控制模型。第三节证明了最优控制的存在性，并利用庞特里亚金极大值原理给出最优控制律。第四节对埃博拉传染病的传播和控制进行了仿真。第五节是本文的结论。

## 2 模型的建立以及目标函数的确立

文献[8]是通过基本再生数研究埃博拉的流行情况，并未研究其最优控制问题。在此基础上，我们把人群分为四类：易感者，感染者，隔离者以及恢复者，并分别用  $S_h(t)$   $I_h(t)$   $Q_h(t)$  和  $R_h(t)$  表示人群的数量；把动物分为两类：易感者和恢复者，分别用  $S_b(t)$   $I_b(t)$  表示动物的数量， $t$ 时刻总人口数和动物总数分别为  $N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + Q_h(t) + R_h(t)$ ， $N_b(t) = S_b(t) + I_b(t)$ 。

本文所研究的时变控制模型如下

$$\begin{cases} S'_h(t) = \Lambda_h - \beta_h S_h I_h - \beta_{bh} S_h I_b - \mu_h S_h \\ I'_h(t) = \beta_h S_h I_h + \beta_{bh} S_h I_b - \mu_h I_h - \alpha_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \\ Q'_h(t) = \delta_h I_h - \mu_h Q_h - d_h Q_h - \varepsilon_h Q_h \\ R'_h(t) = \gamma_h I_h + \varepsilon_h Q_h - \mu_h R_h \\ S'_b(t) = \Lambda_b - \beta_b S_b I_b - \mu_b S_b - u(t) S_b \\ I'_b(t) = \beta_b S_b I_b - \mu_b I_b - u(t) I_b \end{cases} \quad (1)$$

系统(1)中的控制变量  $u(t) \in [0, 1]$  是表示对动物的控制强度。模型中其他参数含义如下表1所示：

表1 模型中各参数的意义

参数	描述	备注
$\Lambda_h$	人群的输入率	$0 < \Lambda_h$
$\Lambda_b$	动物的输入率	$0 < \Lambda_b$
$\beta_h$	人与人之间的传染率	$0 < \beta_h \leq 1$
$\beta_{bh}$	动物与人之间的传染率	$0 < \beta_{bh} \leq 1$
$\beta_b$	动物与动物之间的传染率	$0 < \beta_b \leq 1$
$\mu_h$	人群的自然死亡率	$0 < \mu_h \leq 1$
$\mu_b$	动物的自然死亡率	$0 < \mu_b \leq 1$
$\alpha_h$	人群染病者的因病死亡率	$0 \leq \alpha_h \leq 1$
$d_h$	人群隔离者的因病死亡率	$0 \leq d_h \leq 1$
$\delta_h$	人群染病者的隔离率	$0 \leq \delta_h \leq 1$
$r_h$	人群染病者的恢复率	$0 \leq r_h \leq 1$
$\varepsilon_h$	人群隔离者的恢复率	$0 \leq \varepsilon_h \leq 1$

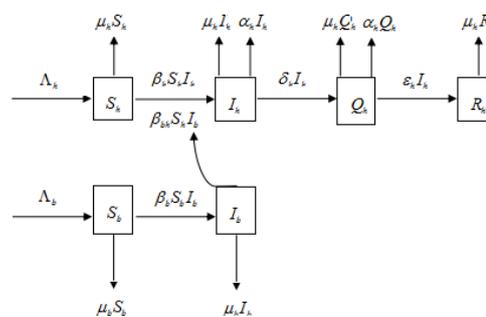


图1 埃博拉传染病模型的传播机制图

在本文所建立的模型中，目标函数为

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left( B_1 S_b + B_2 I_b + \frac{B_3}{2} u^2(t) \right) dt,$$

其中  $t_f$  为末端时刻， $B_1, B_2$  和  $B_3$  为相应的正的平衡

系数. 下面的工作是寻求最优控制  $u^*$ . 使得

$$J(u^*) = \min_{\Omega} J(u),$$

其中约束控制集合为

$$\Omega = \{u \in L^1(0, t_f) | 0 \leq u \leq 1\}.$$

### 3 最优控制的表达形式

本文结合所研究模型及目标函数构造的哈密尔顿函数为  $H = B_1 S_b + B_2 I_b + \frac{B_3}{2} u^2(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i g_i$ ,

其中  $\lambda_i$  为协态变量,  $g_i$  为系统方程 (1) 中第  $i$  个方程的右端函数.

假定控制系统的一个最优控制:

为  $u^*(t)$  及相应的系统状态方程的解为  $(S_h, I_h, Q_h, R_h, S_b)$ , 则存在协态向量  $\lambda_i(t), i=1, 2, \dots, 6$ , 满足:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1(\beta_h I_h + \beta_{bh} I_b + \mu_h) - \lambda_2(\beta_h I_h + \beta_{bh} I_b), \\ \lambda_2' &= \lambda_1 \beta_h S_h - \lambda_2(\beta_h S_h - \mu_h - \alpha_h - \delta_h - r_h) - \lambda_3 \delta_h - \lambda_4 r_h, \\ \lambda_3' &= \lambda_3(\mu_h + d_h + \varepsilon_h) - \lambda_4 \varepsilon_h, \\ \lambda_4' &= \lambda_4 \mu_h, \\ \lambda_5' &= -B_1 + \lambda_5(\beta_b I_b + \mu_b + u(t)) - \lambda_6 \beta_b I_b, \\ \lambda_6' &= -B_2 + \lambda_1 \beta_{bh} S_h - \lambda_2 \beta_{bh} S_h + \lambda_5 \beta_b S_b - \lambda_6(\beta_b S_b - \mu_b - u(t)). \end{aligned}$$

横截条件为  $\lambda_i(t_f) = 0, i=1, 2, \dots, 6$ .

最优控制的表达形式为

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{1}{B_3} (\lambda_5 S_b + \lambda_6 I_b) \right\}, 1 \right\}.$$

$$\lambda_1' = -\frac{\partial H}{\partial S_h}, \lambda_2' = -\frac{\partial H}{\partial I_h}, \lambda_3' = -\frac{\partial H}{\partial Q_h},$$

$$\lambda_4' = -\frac{\partial H}{\partial R_h}, \lambda_5' = -\frac{\partial H}{\partial S_b}, \lambda_6' = -\frac{\partial H}{\partial I_b}$$

由 Pontryagin 极大值原理<sup>[11]</sup> 得协态方程:

横截条件为:  $\lambda_i(t_f) = 0, i=1, 2, \dots, 6$ .

$$\text{由 } \frac{\partial H}{\partial u} = B_3 u - \lambda_5 S_b - \lambda_6 I_b = 0 \text{ 得: } u = \frac{\lambda_5 S_b + \lambda_6 I_b}{B_3}.$$

又因为  $u$  属于可行控制集

$\Omega = \{u \in L^1(0, t_f) | 0 \leq u \leq 1\}$ , 故最优控制的表达形式为

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{1}{B_3} (\lambda_5 S_b + \lambda_6 I_b) \right\}, 1 \right\}.$$

从而我们得到如下最优控制系统:

$$\begin{aligned} S_h'(t) &= \Lambda_h - \beta_h S_h I_h - \beta_{bh} S_h I_b - \mu_h S_h, \\ I_h'(t) &= \beta_h S_h I_h + \beta_{bh} S_h I_b - \mu_h I_h - \alpha_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h, \\ Q_h'(t) &= \delta_h I_h - \mu_h Q_h - d_h Q_h - \varepsilon_h Q_h, \\ R_h'(t) &= \gamma_h I_h + \varepsilon_h Q_h - \mu_h R_h, \\ S_b'(t) &= \Lambda_b - \beta_b S_b I_b - \mu_b S_b - u^*(t) S_b, \\ I_b'(t) &= \beta_b S_b I_b - \mu_b I_b - u^*(t) I_b, \\ \lambda_1' &= \lambda_1(\beta_h I_h + \beta_{bh} I_b + \mu_h) - \lambda_2(\beta_h I_h + \beta_{bh} I_b), \\ \lambda_2' &= \lambda_1 \beta_h S_h - \lambda_2(\beta_h S_h - \mu_h - \alpha_h - \delta_h - r_h) - \lambda_3 \delta_h - \lambda_4 r_h, \\ \lambda_3' &= \lambda_3(\mu_h + d_h + \varepsilon_h) - \lambda_4 \varepsilon_h, \\ \lambda_4' &= \lambda_4 \mu_h, \\ \lambda_5' &= -B_1 + \lambda_5(\beta_b I_b + \mu_b + u^*(t)) - \lambda_6 \beta_b I_b, \\ \lambda_6' &= -B_2 + \lambda_1 \beta_{bh} S_h - \lambda_2 \beta_{bh} S_h + \lambda_5 \beta_b S_b - \lambda_6(\beta_b S_b - \mu_b - u^*(t)), \\ \lambda_i(t_f) &= 0, i=1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

### 4 数值模拟

本部分将用数值仿真的方法来研究埃博拉传染病模型 (1) 的最优控制解, 利用四阶龙格库塔迭代法<sup>[12, 13]</sup> 来解最优控制系统. 我们的目的是揭示控制措施对埃博拉传染病传播的影响. 从而验证最优控制的有效性.

假设人群中易感者, 染病者, 隔离者以及恢复者的初始值分别为  $S_h(0)=100, I_h(0)=15, Q_h(0)=10, R_h(0)=5$ . 同时假设动物群体中易感者, 染病者初始值分别为  $S_b(0)=100, I_b(0)=20$ , 仿真中所用的其他参数的数值如表 2 中所列.

表 2 最优控制数值仿真中所用参数

参数	描述	数值
$\Lambda_h$	人群的输入率	10
$\Lambda_b$	动物的输入率	100
$\beta_h$	人与人之间的传染率	0.0003
$\beta_{bh}$	动物与人之间的传染率	0.03
$\beta_b$	动物与动物之间的传染率	0.02
$\mu_h$	人群的自然死亡率	0.1
$\mu_b$	动物的自然死亡率	0.8
$\alpha_h$	人群中染病者的因病死亡率	0.4
$\delta_h$	人群染病者的隔离率	0.06
	人群中隔离者的因病死亡率	0.3
$r_h$	人群中染病者的恢复率	0.3
$\varepsilon_h$	人群中隔离者的恢复率	0.3

在实践中理想的权重是很难获得的, 那需要大量关于数据挖掘、分析、拟合工作, 因此要想得到实际中恰当的权重是一个困难的问题并且还需要作进一步研究. 基于这些事实, 我们选取目标函数中的权重分别为  $B_1 = 0.5, B_2 = 0.5, B_3 = 0.5$ . 需要指出的是这里所用的权重仅仅是本部分出于理论上用来揭示控制措施效果的考虑.

图 2-5 描述了在无控制和有最优控制的情形下, 动物群体和人类群体中感染者和易感者数量. 从图 2 和图 3 中可以看出, 在对动物实施最优控制时, 动物群体和人类群体中感染者数量比无控制时要少. 从图 4 和图 5 中可以看出, 在对动物实施最优控制时, 动物群体和人类群体中易感者数量比无控制时要多. 这也从侧面反映了对动物采取最优控制策略可以有效地控制疾病的传播和蔓延.

### 5 结论

本文通过引入埃博拉传染病模型研究了控制策略对埃博拉传染病传播的影响. 利用庞特里亚金极大值原理给出了最优控制表达形式. 通过数值仿真揭示了在控制策略下的传播趋势, 仿真结果表明在疾病的传播过程中对动物采取最优控制策略可以更有效地防止传染病的传播和蔓延.

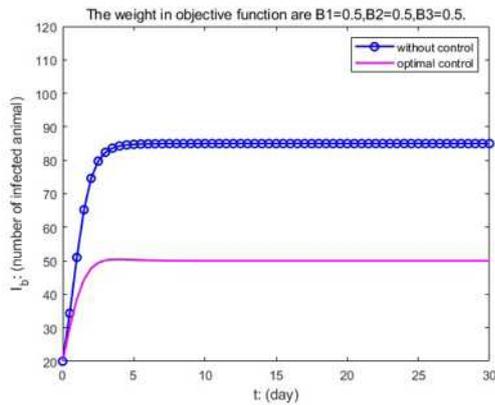


图2 无控制和有控制情形下动物染病者数量。

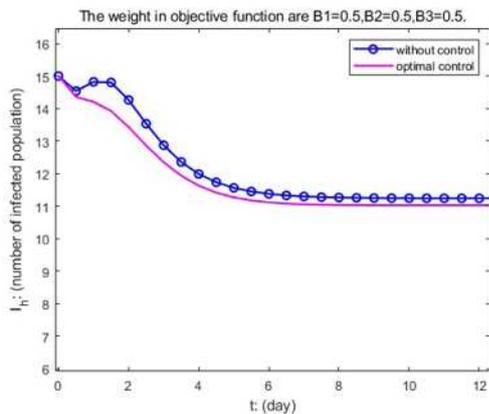


图3 无控制和有控制情形下人类染病者数量。

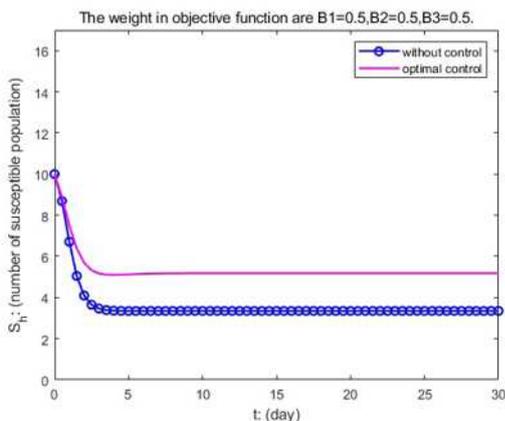


图4 无控制和有控制情形下人类易感者数量。

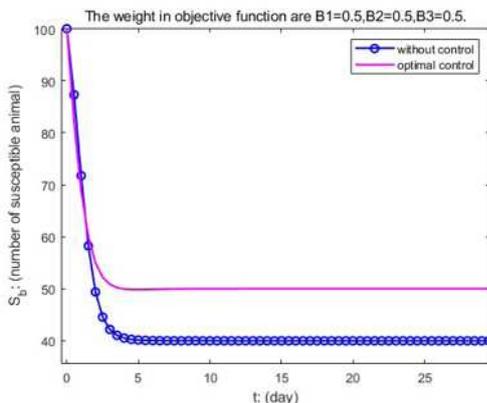


图5 无控制和有控制情形下动物易感者数量。

参考文献:

[1] 埃博拉病毒. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs103/zh/>.

[2] 张雅为. 埃博拉出血热-人兽共患传染病[J]. 现代畜牧兽医, 2014, 10:37-40.

[3] D. Ndanguza, J. M. Tchuenche, H. Haario. Statistical data analysis of the 1995 Ebola outbreak in the Democratic Republic of Congo[J]. Afrika Matematika, 2013, 24:55 - 68.

[4] A. Camacho, A. J. Kucharski, S. Funk, J. Breman, P. Piot, W. J. Edmunds. Potential for large outbreaks of Ebola virus disease[J]. Epidemics, 2014, 9:70 - 78.

[5] Z. M. Li, Z. D. Teng, X. M. Feng, Y. K. Li., H. G. Zhang. Dynamical Analysis of an SEIT Epidemic Model with Application to Ebola Virus Transmission in Guinea[J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2015, 2015:582-625.

[6] C. L. Althaus, Low N, E. O. Musa, F. Shuaib, S. Gsteiger. Ebola virus disease outbreak in Nigeria: Transmission dynamics and rapid control[J]. Epidemics, 2015, 11:80-84.

[7] S. Edward. Mathematical Modeling of the Transmission Dynamics of Ebola Virus Disease with control Strategies[J]. International Journal of Sciences Basic&Applied Research, 2017, 33:112-130.

[8] 韦爱举, 张新建, 王俊义, 李科赞. 一类埃博拉传染病模型的动力学分析. 数学物理学报, 2016, 10:37-40.

[9] D. L. Lukes, Differential Equations: Classical to Controlled, Mathematics in Science and Engineering[M]. Academic Press, 1982.

[10] W. H. Fleming and R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control[M]. Springer-Verlag, 1975.

[11] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. The Mathematical Theory of Optimal Processes[M]. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[12] S. Lenhart, J. T. Workman. Optimal Control Applied to Biological Models[M]. Chapman and Hall, 2007.

[13] W. K. Hackbusch. A numerical method for solving parabolic equations with opposite Orientations[J]. Computing, 1978, 20:229-240.

基金项目：广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(NO. 2021KY1653)；桂林电子科技大学信息科技学院2020年科研启动基金项目(NO. XJ202083)；皮草行业中韩进出口关系的实证分析研究(NO. 012024008)；基于供应链合作关系下皮草产业发展的研究(NO. 012024009)。