教育探索

初中数学几何图形最值问题求解的构造法研究

熊国华
南昌县泾口中学　330215

【摘　要】初中数学中的几何图形最值问题一直是教学的重点与难点。构造法作为一种重要的解题策略，能够将复杂的几何最值问题转化为易于理解和解决的形式。本文深入探讨了构造法在初中几何图形最值问题中的应用，通过对不同类型问题的分析，阐述了如何巧妙运用构造法找到解题思路，从而有效解决几何图形最值问题，同时根据对实际案例进行了分析，为提高学生的解题能力和数学思维水平提供思路。

【关键词】初中数学；几何图形；最值问题

Research on the construction method of solving the maximum value problem of geometric figures in junior high school mathematics

Xiong Guohua
Jingkou Middle School，Nanchang County　330215

【Abstract】The problem of finding the maximum or minimum values of geometric figures in junior high school mathematics has always been a key and challenging focus of teaching. As an important problem-solving strategy，the construction method can transform complex geometric optimization problems into more understandable and solvable forms. This paper delves into the application of the construction method in solving geometric optimization problems at the junior high school level. By analyzing different types of problems，it explains how to skillfully apply the construction method to find solutions，thereby effectively addressing geometric optimization issues. Additionally，through the analysis of practical cases，it provides insights for enhancing students' problem-solving abilities and mathematical thinking skills.

【Key words】junior high school mathematics；geometric figures；maximum value problem

一、引言

（一）研究背景与意义

几何图形最值问题在初中数学中占据着举足轻重的地位。它是数学学习与考试中的一大难点，也是培养学生逻辑思维、问题解决能力的重要载体。从应用价值来看，几何最值问题广泛存在于现实生活的各个领域，如建筑设计中的空间优化、物理实验中的路径选择等，都需要借助几何最值问题的求解思想和方法。在数学竞赛与中考中，几何最值问题常作为压轴题出现，对学生的综合能力和创新能力提出了较高要求。研究几何图形最值问题的求解构造法，不仅有助于学生更好地掌握相关知识，提升解题能力，还能为数学教育提供新的教学思路和方法，推动数学教育的发展。

（二）研究目的与方法

本研究旨在深入探究初中数学几何图形最值问题的求解构造法，总结出有效的解题策略和思维模式，帮助学生突破学习难点，提高解题效率。研究将采用文献研究法，梳理已有的关于几何最值问题的研究成果，了解前人的研究思路和方法，为本研究提供理论依据。同时，运用案例分析法，选取大量典型的几何最值问题案例，对这些问题进行深入剖析，总结其中的规律和特点，提炼出通用的求解构造法。通过理论与实践相结合的方式，验证所提出的求解构造法的有效性和实用性，为初中数学几何图形最值问题的教学和学习提供有价值的参考。

二、初中数学几何图形最值问题的常见类型

（一）线段最值问题

点到点之间的线段最值：在平面内，两点之间线段最短。例如，已知 A、B 两点，在平面上找一点 P，使得 $PA+PB$ 的值最小。当点 P 在线段 AB 上时，$PA+PB$ 取得最小值，即 AB 的长度。这是基于基本的几何公理，是解决许多复

杂线段最值问题的基础。

点到直线的线段最值：从直线外一点到这条直线所作的垂线段最短。如在直线 l 外有一点 A，过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为 B，则线段 AB 的长度就是点 A 到直线 l 的最短距离。在实际问题中，常常需要通过构造垂线来确定线段的最值。

两条线段和的最值：这是较为常见且复杂的类型，典型的如 "将军饮马" 问题。在一条直线的同侧有两个定点 A、B，在直线上找一点 P，使得 PA + PB 的值最小。通过作点 A 关于直线的对称点 A'，连接 A'B 与直线相交于点 P，此时 PA + PB = A'P + PB = A'B，根据两点之间线段最短，A'B 即为 PA + PB 的最小值。这种类型的问题关键在于巧妙利用对称构造出共线的线段。

（二）周长最值问题

对于一些几何图形，在特定条件下求其周长的最值。比如，已知三角形的一边长度固定，另外两边之和为定值，求该三角形周长的最值。通常可以通过构造全等三角形或利用三角形三边关系来求解。例如，在△ABC 中，AB = c（固定值），AC + BC = m（定值），延长 CB 至 D，使 BD = AC，连接 AD。此时，CD = m，在△ABD 中，根据三角形三边关系，当 A、B、D 三点共线时，AD 最短，进而可求得△ABC 周长的最值。

三、构造法在初中数学几何图形最值问题中的应用

（一）构造全等三角形

实例分析：

在△ABC 中，AB = AC = 5，BC = 6，点 D 是 BC 边上的动点，连接 AD，将△ABD 沿 AD 折叠，得到△AED，点 B 的对应点为 E。当点 E 落在 AC 上时，求 CD 的长。

分析：过点 A 作 AF⊥BC 于点 F，因为 AB = AC，所以 BF = CF = 3。在 Rt△ABF 中，根据勾股定理可得 AF = 4。设 CD = x，则 DF = 3 – x。由折叠可知，AE = AB = 5，DE = BD = 6 – x。在△AEF 中，EF = AE – AF = 1。在 Rt△DEF 中，根据勾股定理构造方程：$(3-x)^2+1^2=(6-x)^2$，解得 x = 8/3。这里通过构造 Rt△DEF，利用勾股定理建立方程求解，而 Rt△DEF 的构造基于全等三角形的性质（折叠得到全等）。

解题思路总结：当几何图形中存在相等的线段或角度关系，且通过构造全等三角形能够将分散的条件集中起来时，可运用此方法。通过构造全等三角形，将所求线段与已知线段建立联系，利用全等三角形的对应边、对应角相等的性质，结合其他几何知识，如勾股定理、三角形三边关系等，来解决最值问题。

（二）构造相似三角形

实例分析：

如图，在矩形 ABCD 中，AB = 6，AD = 8，点 E 是 BC 边上的一个动点（不与 B、C 重合），过点 E 作 EF⊥AE 交 CD 于点 F。设 BE = x，CF = y，求 y 与 x 之间的函数关系式，并求当 x 为何值时，y 有最大值，最大值是多少？

分析：因为∠AEB + ∠FEC = 90°，∠AEB + ∠BAE = 90°，所以∠BAE = ∠FEC。又因为∠B = ∠C = 90°，所以△ABE∽△ECF。根据相似三角形的性质，AB/EC = BE/CF，即 6/(8 – x)= x/y，整理可得 $y=-1/6x^2+4/3x=-1/6(x-4)^2+8/3$。所以当 x = 4 时，y 有最大值 8/3。在此问题中，通过构造相似三角形△ABE 和△ECF，建立了变量 x 与 y 之间的函数关系，从而利用二次函数的性质求出 y 的最值。

解题思路总结：当几何图形中存在角相等或平行关系时，往往可以构造相似三角形。通过相似三角形对应边成比例的性质，将所求的量与已知量联系起来，建立函数关系或方程，进而求解最值。构造相似三角形的关键在于准确找到相等的角或平行关系，确定相似三角形的对应边。

（三）构造辅助圆

实例分析：

在平面直角坐标系中，点 A（0，4），B（3，0），点 P 是 x 轴上的一个动点，当∠APB 最大时，求点 P 的坐标。

分析：作△APB 的外接圆⊙C，当⊙C 与 x 轴相切于点 P 时，∠APB 最大（同弧所对的圆周角大于圆外角）。设⊙C 的半径为 r，则 OC = 4 – r。在 Rt△BOC 中，根据勾股定理可得 $(4-r)^2=r^2+3^2$，解得 r = 7/8。所以点 P 的坐标为（3 – 7/8，0），即（17/8，0）。这里通过构造辅助圆，利用圆的性质（同弧所对圆周角与圆外角的大小关系）来确定∠APB 最大时的情况，进而求解点 P 的坐标。

解题思路总结：当几何图形中出现定点和动点，且动点满足的条件与圆周角有关时，可考虑构造辅助圆。利用圆的性质，如同弧所对圆周角相等、直径所对圆周角为直角、圆外角小于圆周角等，将问题转化为与圆相关的问题来求解最值。构造辅助圆的关键是确定圆心和半径，以及找到与圆相关的几何关系。

（四）构造函数关系

实例分析：

如图，在边长为 4 的正方形 ABCD 中，点 E 是 AB 边上的一个动点（不与 A、B 重合），点 F 是 BC 边上的一个动点，且 AE = BF，连接 DE、AF，设 AE = x，△ADE 与△BAF 重叠部分的面积为 S，求 S 与 x 之间的函数关系式，并求 S 的最大值。

分析：易证△ADE≌△BAF，可得∠ADE = ∠BAF。因为∠ADE + ∠AED = 90°，所以∠BAF + ∠AED = 90°，则∠AME = 90°。S△ADE = 1/2 × 4 × x = 2x，S△BAF = 1/2 × 4 × x = 2x。S = S△ADE + S△BAF − S 四边形 ABFE = 2x + 2x −（4x − 1/2x²）= 1/2x²。因为点 E 不与 A、B 重合，所以 $0 < x < 4$。当 $x = 4$ 时，S 有最大值 8，但 x 取不到 4，当 x 趋近于 4 时，S 趋近于 8，又因为二次函数 S = 1/2x² 在 $0 < x < 4$ 上单调递增，所以当 $x = 2$ 时，S 在取值范围内取得最大值 2。在此问题中，通过构造函数关系 S = 1/2x²，结合自变量的取值范围，利用二次函数的单调性求出 S 的最大值。

解题思路总结：当几何图形中的最值问题涉及到多个变量之间的关系时，可尝试构造函数关系。将所求的最值表示为一个变量的函数，根据函数的性质（如一次函数的单调性、二次函数的最值等）来求解。构造函数关系的关键是准确找出变量之间的等量关系，建立合理的函数表达式，并确定自变量的取值范围。

四、构造法在教学中的应用建议

（一）加强几何基础知识的教学

在初中数学教学中，要夯实学生的几何基础。教师可通过直观演示、动手操作等方式，让学生深刻理解几何概念与性质。如讲解三角形中位线定理时，让学生亲手制作三角形模型，测量并验证中位线与第三边的关系。注重知识间的联系，引导学生在解题中灵活运用几何知识，为运用构造法解决几何最值问题奠定坚实基础。

（二）培养学生的构造思维

培养学生的构造思维能力，需注重启发引导。教师在讲解几何最值问题时，可先引导学生分析题目条件与目标，鼓励他们尝试不同的构造方法，再给出正确的解题思路。设置专项训练，让学生针对不同类型的几何最值问题，进行构造练习，逐步提高构造的准确性与灵活性，培养学生的创新思维与问题解决能力。

（三）结合实际生活实例

将实际问题融入几何最值教学，能激发学生的学习兴趣。比如以修建道路问题为例，引导学生利用将军饮马模型求解最短路径；或将篮球投篮角度与抛物线结合，讲解角度最值问题。通过生活实例，让学生认识到几何最值问题的实际应用价值，增强学习的主动性与积极性。

（四）鼓励学生自主探索与合作交流

鼓励学生在面对几何最值问题时，先自主思考，尝试构造解题方法，再与同学交流分享不同的思路与解法。教师组织小组讨论，对学生的想法给予肯定与指导，让学生在合作中相互启发，共同进步，深入理解构造法在几何最值问题中的应用。

结论

构造法在初中数学几何图形最值问题的求解中具有重要作用，它为学生提供了多样化的解题思路和方法。通过构造全等三角形、相似三角形、辅助圆或函数关系等，能够将复杂的几何问题转化为易于解决的形式。在教学过程中，教师应注重培养学生运用构造法的意识和能力，通过加强基础知识教学、培养观察能力、引导解题思路以及开展针对性练习等措施，帮助学生掌握构造法的精髓，提高学生解决几何图形最值问题的能力，进而提升学生的数学综合素养。随着对构造法研究的不断深入，相信它将在初中数学教学中发挥更大的作用，为学生的数学学习带来更多的帮助。

参考文献

[1]李钦. 以几何图形为例谈初中数学复习课的教学对策 [J]. 中学数学，2024，(20)：115-116.
[2]贾春千. 例析几何图形中最值问题的不同题型及解答思路 [J]. 数理天地（初中版），2023，(19)：16-17.
[3]田海霞. 初中数学几何图形中有关最值问题的解题思路分析 [J]. 数学学习与研究，2022，(25)：155-157.
[4]张海霞. 以模型为例 探究几何最值问题 [J]. 数理化解题研究，2021，(35)：34-35.
[5]蔡子洋. 谋定而后动——挖掘特性，巧求线段最值 [J]. 数学大世界（上旬），2019，(07)：29.