

非厄米 kicked rotor 系统量子信息动力学的量子-经典对应

戴卿

江西理工大学 江西赣州 341000

【摘要】本研究通过相位调制的非厄米kicked rotor系统，揭示了量子非共振条件下定向输运、能量扩散及量子信息置乱动力学的调控机制。理论分析表明，系统平均动量、能量及非时序关联函数（Out-of-Time-Ordered Correlators, OTOCs）在时间演化中呈现渐进饱和行为，其稳态值可通过非厄米kick势的相位实现有效操控。在半经典极限（有效普朗克常数 $\hbar_{\text{eff}} \rightarrow 0$ ）下，OTOCs表现出指数增长特性，其增长率与对应厄米系统的经典Lyapunov指数精确一致，首次在非厄米框架下建立了量子动力学与经典混沌的普适性关联。这一发现不仅深化了非平衡量子系统中Floquet工程的理论基础，还为量子混沌操控、非厄米能带调控及开放量子信息处理提供了新的研究范式。

【关键词】非厄米kicked rotor系统；量子-经典对应；量子信息置乱

Quantum-classical correspondence of quantum information dynamics in non-Hermitian kicked rotor systems

Dai Qing

Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi Province 341000

【Abstract】In this study, we reveal the regulation mechanism of directional transport, energy diffusion and quantum information scrambling dynamics in quantum non-resonant kicked rotor system. Theoretical analysis shows that the system mean momentum, energy and non-temporal correlation functions (Out-of-Time-Ordered Correlators, OTOCs) show gradual saturation behavior in the time evolution, and their steady-state value can be effectively controlled by the phase of non-Hermitian kick potential. In the semiclassical limit (effective Planck constant $\hbar_{\text{eff}} \rightarrow 0$), OTOCs exhibit exponential growth characteristics, whose growth rate is exactly consistent with the classical Lyapunov exponent of the corresponding Hermitian system, and the universality correlation between quantum dynamics and classical chaos is established for the first time in the non-Hermitian framework. This discovery not only deepens the theoretical basis of Floquet engineering in non-equilibrium quantum systems, but also provides a new research paradigm for quantum chaos control, non-Hermitian zone regulation, and open quantum information processing.

【Key words】non-Hermitian kicked rotor system; quantum-classical correspondence; quantum information chaos

I.引言

近年来，非厄米性被视为对传统量子力学的修正^[1]，特别是PT对称体系展示了从实能谱到复能谱的转变，伴随异

常点的出现，产生了诸如量子传感器精度提升、拓扑相变^[2]、非绝热跃迁和光的单向传播等现象^[3]。PT对称受击转子（PTKR）模型中混沌诱导的对称性破缺和能量扩散^[4]，增强

了我们对混沌系统的理解。非时序关联子^[5] (OTOCs) 被广泛用于探测量子混沌、热化和信息扰乱等现象^[6], 特别是在周期驱动系统中具有重要应用。

本文研究了非厄米 kicked rotor 系统^[7], 探讨了相位调制对定向传输^[8]、能量扩散和量子信息置乱的影响。结果发现, 系统的平均动量^[9]、能量和 OTOCs 在时间演化中逐渐趋向饱和, 且饱和值可通过非厄米 kick 势的相位调整。在半经典极限下^[10], OTOCs 的指数增长与经典 Lyapunov 指数相一致, 揭示了量子-经典的对应关系^[11]。这些发现为非厄米系统中的量子动力学调控提供了理论指导, 并在量子混沌和凝聚态物理等领域具有潜在应用价值。

本文的组织结构如下: 第 II 节描述本文研究的模型和主要结果; 第 III 节给出全文总结。

II. 模型和主要研究结果

非厄米 kicked rotor 模型无量纲的哈密顿量为:

$$H = \frac{p^2}{2} + V_K(\theta) \sum_n \delta(t - t_n), \quad (1)$$

其中, kick 势为:

$$V_K(\theta) = K \cos(\theta) + i\lambda \cos(\theta + \phi), \quad (2)$$

其中 $p = -i\hbar_{\text{eff}} \frac{\partial}{\partial \theta}$ 是角动量算符, θ 是角坐标, 满足对易关系 $[\theta, p] = i\hbar_{\text{eff}}$, 其中 $\hbar_{\text{eff}}$ 为有效普朗克常数。参数 K 和 λ 分别表示 kick 势的实部和虚部的强度。两部分之间的相对相位由参数 ϕ 决定。角动量算符的本征方程为:

$$p|\phi_n\rangle = p_n|\phi_n\rangle, \text{ 其中本征值 } p_n = n\hbar_{\text{eff}}, \text{ 本征态为: } \langle \theta | \phi_n \rangle = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}.$$

在此完备基下, 任意态 $|\psi\rangle$ 可展开为: $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |\phi_n\rangle$ 。量子态从 t_n 到 t_{n+1} 的演化表示为: $|\psi(t_{n+1})\rangle = U|\psi(t_n)\rangle$, 其中演

化算子, 即 Floquet 算符 $U = U_f U_K$ 由自由演化算符 $U_f = \exp(-ip^2/2\hbar_{\text{eff}})$ 和 kick 势演化算符 $U_K = \exp[-iV_K(\theta)/\hbar_{\text{eff}}]$ 组成。不失一般性, 我们在数值计算中选择角动量算符的基态作为初始态, 即: $\psi(\theta, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 。

由于光传播方程与薛定谔方程的等价性, 全光学系统为实现非厄米 Floquet 模型提供了理想平台。文章^[12]作者设计了一种光学装置, 包括法布里-珀罗谐振器和腔内相位与损耗光栅, 用于模拟非厄米 Kicked Rotor 的量子动力学。在该系统中, 镜面反射模拟周期 kick, 镜子间距控制有效普朗克常数, 损耗光栅相位可调, 以实现不同对称性的 kick 势。通过光学频域测量平均值, 验证研究结果。此外, 原子光学实验通过动量空间飞行时间测量, 提供了实验验证的基础。

在本文中, 我们通过解析和数值方法研究了动量流 $\langle p(t) \rangle$ 、平均能量 $\langle p^2(t) \rangle$ 和量子信息置乱 $C(t) = -\langle [A(t), B]^2 \rangle$ 的动力学。需要注意的是, $C(t)$ 在海森堡绘景中定义, 其中 $A(t) = U^\dagger(t) A U(t)$, 符号 $\langle \cdot \rangle = \langle \psi(t_0) | \cdot | \psi(t_0) \rangle$ 表示算符关于初始态的期望值。为了消除波函数的模对力学量平均值的影响。我们定义可观测量的平均值为:

$$\langle p(t) \rangle = \sum_n p_n |\psi_n|^2 / \mathcal{N} \text{ 和 } \langle p^2(t) \rangle = \sum_n p_n^2 |\psi_n|^2 / \mathcal{N}(t). \text{ 我们使用算}$$

符 $A = e^{-i\epsilon p}$ 和 $B = |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0)|$ 来构造 OTOCs。通过推导, 可得到 $C(t) = \mathcal{N}^2(t) - |\langle \psi(t) | e^{-i\epsilon p} | \psi(t) \rangle|^2$ 。然后, 消除波函数的模, 把 OTOCs 重新定义为 $C(t) = 1 - |\langle \psi(t) | e^{-i\epsilon p} | \psi(t) \rangle|^2 / \mathcal{N}^2(t)$ 。

在厄米 KR 模型中, 量子非共振情形下会出现一些有趣的现象, 例如遍历性破缺和动力学局域化。因此, 我们采用数值方法, 研究了动量流、平均能量以及远离量子共振情形, 即 $\hbar_{\text{eff}} = 4\pi + \Delta$ 的量子信息置乱动力学行为。发现, 在非非常小的 Δ 例如 $\Delta = 10^{-4}$ (如图 1(a) 所示) 下, $\langle p \rangle$ 在有

限时间演化过程中（即 $t < t^*$ ）的行为与 $\Delta = 0$ 的情况一致，长时演化后 $t > t^*$ 时逐渐达到饱和。此外，其饱和水平以及临界时间 t^* 随着 Δ 的增加而减小。这表明量子干涉效应导致了动力学局域化，并抑制了动量空间中的定向输运。动力学局域化对平均能量的影响在图 1 (c) 中清晰可见，其中饱和水平 $\langle p^2 \rangle$ 随着 Δ 的增加而降低。在长期演化后，非零值 Δ 下的 OTOCs（例如 $\Delta = 10^{-4}$ ，如图 1 (e) 中所示）也表现出饱和行为。饱和值随着 Δ 的增加而减小，这表明由于动力学局域化导致的量子信息置乱冻结。

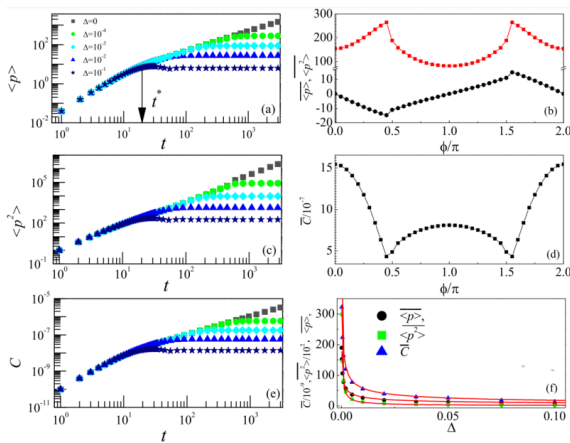


图 1 平均动量 $\langle p \rangle$ (a)、平均动能 $\langle p^2 \rangle$ (c) 和 OTOCs C (e) 随时间的变化，参数取值 $\lambda = 1$ 和 $\hbar_{\text{eff}} = 4\pi + \Delta$ ， Δ 分别取 0 (方块)、 10^{-4} (圆圈)、 10^{-3} (菱形)、 10^{-2} (三角形) 和 10^{-1} (五角星)。(a) 中的箭头标记了临界时间 t^* 。(b) $\langle p \rangle$ (圆圈) 和 $\langle p^2 \rangle$ (方块) 随 ϕ 的变化，当 $\Delta = 0.1$ 。在 (d) 中， C (三角形) 随 ϕ 的变化，当 $\Delta = 0.1$ ；而在 (f) 中， $\langle p \rangle$ (圆圈)、 $\langle p^2 \rangle$ (方块) 和 C (三角形) 随 Δ 的变化，当 $\phi = -\pi/6$ 。红色实线表示幂律拟合 $\propto t^{-\beta}$ ，其中 $\langle p \rangle$ 的指数为 $\beta = 0.44$ ， $\langle p^2 \rangle$ 为 $\beta = 0.8$ ，而 C 为 $\beta = 0.5$ 。即， $C \approx 2\pi\epsilon^2|\lambda|t$ ，因为 C 表现为 2ϕ 的余弦函数。对于 $\phi = \pi$ ，NQKR 模型是一个不具有 PT 对称性的普通非厄米系统，在这种情况下，定向输运完全被抑制，即 $\langle p \rangle = 0$ ，且平均能量随时间减少，表现为

$\langle p^2 \rangle \propto t$ 。相比之下，当 C 达到最大值时， $C \approx 2\pi\epsilon^2 t(K^2 + \lambda^2)/|\lambda|$ ，表明非厄米性增强了量子信息置乱。

我们进一步研究了不同相位 ϕ 下，动量流 $\langle p \rangle$ 、平均能量 $\langle p^2 \rangle$ 以及量子信息置乱 C 的饱和值。结果显示， $\langle p \rangle$ 表现出三种不同的行为：(i) 当 $\phi < \pi/2$ 时， $\langle p \rangle$ 线性减小；(ii) 当 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ 时， $\langle p \rangle$ 线性增加；(iii) 当 $\phi > 3\pi/2$ 时， $\langle p \rangle$ 再次线性减小（见图 1 (b)）。这些不同机制之间的转换非常清晰，表明了非厄米 kick 势调整的不连续性。此外， $\langle p^2 \rangle$ 也显示出三种不同的行为。随着 ϕ 的增加， $\langle p^2 \rangle$ 在 $\phi < \pi/2$ 时单调增加，在 $\phi = \pi$ 时达到最小值，之后随着 ϕ 继续增加再次升高，最终在 $\phi > 3\pi/2$ 时减小。而 C 的趋势与 $\langle p^2 \rangle$ 相反，表明 C 的变化由 ϕ 控制的不连续性驱动（见图 1 (d)）。我们进一步对 Δ 趋近于 0 时， $\langle p \rangle$ 、 $\langle p^2 \rangle$ 和 C 的渐近行为进行了数值研究。在特定 ϕ （例如， $\phi = -\pi/6$ ，如图 1 (f) 中所示）下，它们均表现出幂律发散行为，即 $\propto t^{-\beta}$ ，其中 β 随着 $\Delta \rightarrow 0$ 而趋近于无穷。

量子混沌的一个核心问题是量子行为与经典极限 ($\hbar_{\text{eff}} \rightarrow 0$) 的比较。对于任意有限 $\hbar_{\text{eff}}$ ，厄米 KR 模型在有限时间内 Ehrenfest 时间 t_E 之前表现出经典混沌行为，即经典混沌行为。超过此时间后，量子可积行为出现，系统停止吸收能量。对于厄米 KR 模型，OTOCS 的动力学 $C_Q = -(\langle p(t), p \rangle^2)$ 与其经典对应 $C_{cl} \propto \hbar_{\text{eff}}^2 \exp(2\gamma t)$ 在 $t < t_E$ 时相一致性。超过 t_E 时，量子相干性破坏了 OTOCs 的经典混沌行为，导致其以二次幂增长。我们进一步研究了半经典临域，即非常小 $\hbar_{\text{eff}}$ 的 OTOCs 动力学。期望探索量子效应是否在非厄米情形中也影响混沌行为。值得注意的是，非厄米系统的经典极限仍然是一个悬而未决的问题。

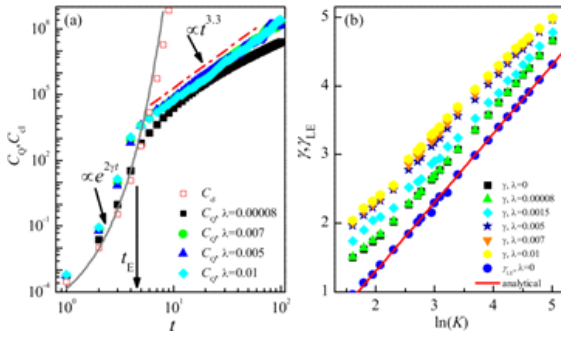


图 2 a 展示了 $\lambda = 0.00008$ 空方块、 0.007 圆形、 0.005 三角形以及 0.01 菱形时 C_d 和 C_q 随时间的变化。实线和点划线分别表示拟合函数形式 $C \propto e^{2\gamma t}$ 和 $C \propto t^{3.3}$ 。箭头标记了 Ehrenfest 时间 t_E 。参数为 $K = 8$ 和 $\hbar_{\text{eff}} = 0.003$ 。图 2 b 展示了 γ 和 γ_{LE} 圆点与 $\ln K$ 的关系。 γ_{LE} 是在 $\lambda = 0$ 时评估的。非厄米参数的值为 $\lambda = 0$ 方块、 0.00008 上三角形、 0.0015 菱形、 0.005 五角星、 0.007 下三角形以及 0.01 六边形。红色实线表示关系 $\gamma_{LE} = 2 \ln K$ 。

参考文献

- [1] A. Kenfack et al. (2008): Investigates the control of the ratchet effect in cold atoms.
- [2] C. Hainaut et al. (2018): Studies the ratchet effect in the quantum kicked rotor and its destruction by dynamical localization.
- [3] Z. Q. Li et al. (2023): Examines the ratchet current in a PT-symmetric Floquet quantum system.
- [4] D. Poletti et al. (2007): Discusses the interaction-induced quantum ratchet effect in a Bose-Einstein condensate.
- [5] J. B. Gong and P. Brumer (2001): Investigates coherent control of quantum chaotic diffusion.
- [6] M. Bitter and V. Milner (2017): Experimental demonstration of coherent control in quantum chaotic systems.
- [7] M. A. Sentef et al. (2020): Studies the quantum to classical crossover of Floquet engineering in correlated quantum systems.
- [8] S. Y. Bai and J. H. An (2020): Explores the reactivation of a dissipative quantum battery through Floquet engineering.
- [9] C. A. Downing and M. S. Ukharty (2023): Investigates a quantum battery with quadratic driving.
- [10] E. J. Meier et al. (2019): Explores quantum signatures of chaos on a Floquet synthetic lattice.
- [11] J. H. Wang et al. (2022): Studies information scrambling dynamics in a fully controllable quantum simulator.
- [12] S. Longhi (2017): Investigates localization, quantum resonances, and ratchet acceleration in a periodically kicked PT-symmetric quantum rotator.

III.总结

基于周期驱动势的量子动力学调控策略已被证实具有显著效果,其有效性通过原子光学与光波导领域的先进实验平台得到验证。本文研究发现, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ 和 C 随时间演化趋近于饱和,而饱和值可通过 φ 调节。在半经典极限下, C_Q 随时间指数增长,其增长率正比于经典 Lyapunov 指数,表征了一类量子-经典对应。Kicked Rotor 系统及其拓展模型是物理学中不同领域的典型系统,涉及的研究问题包括量子-经典过渡、动力学相变、多体量子混沌和拓扑新物相。本研究成果可为驱动系统研究提供新的理论视角,后续研究可着重探讨非厄米 Kicked Rotor 模型中动力学局域化与非厄米 Anderson 模型局域化之间的潜在关联机制。