贵州省专升本考试高等数学证明题方法研究

马 鑫
（毕节医学高等专科学校，贵州 毕节 551700）

摘要：随着在近几年贵州省专升本招生计划的增加，报名人数也在逐年增加，证明题已经成为近年来《高等数学》常考题型。证明题涉及的常见题型涉及知识点有函数的单调性、根的存在定理、Lagrange 中值定理。

关键词：专升本；高等数学；证明题；辅助函数
DOI：10.12373/xdhjy.2022.06.4967

随着近年来就业压力增加和社会需求对学历要求越来越高，贵州省专升本报考人数逐年攀升，专升本升学难度越来越大。通过专升本考试能够选拔优秀的高职高专学生到本科学校深造，两年制的专升本学习完成后可以拿到全日制的本科毕业证书及学士学位证书，给了大专层次的同学一次“弯道超车”的机会，同时也提升就业竞争力。

2020 年贵州省专升本报名人数达到 2.4 万人，录取计划数 1.2 万人左右，有 70% 左右的计划数只招收理科，高等数学作为专升本理科必考科目之一近年来题型相对稳定。根据我在毕节医学高等专科学校多年教学了解到的现状，三分之一的同学有参加专升本考试的愿望，医药类大部分专业只招收理科生，高等数学成了同学们的“拦路虎”，大多数同学只会简单的记公式做计算题，缺乏理论证明的训练，对于证明题普遍觉得困难，证明题通常也会以“压轴题”的姿态出现在试卷的最后，本文对 2012 年 ~ 2022 年贵州省专升本考试的证明题进行全面分析，部分真题为考生回忆版本，系统总结证明题涉及的知识点及方法技巧，全面对证明题“套路”进行剖析，希望今后参加贵州省专升本高等数学考试的同学复习备考得到启示和帮助。

一、知识点总结

（一）构造辅助函数判断单调性证明“左右”形式不等式。

通常考察函数单调性：函数 $h(x)$ 在其定义域 D 内为增函数或减函数，任意给定定义域内的 m、n，当 $m<n$ 时，则有 $h(m)<k(n)$ 或 $h(m)>k(n)$ 恒成立，函数 $h(x)$ 为构造辅助函数，$h(x)=f(x)-p(x)$，一般情况下出现 $h(m)=0$，证明 $f(x)>p(x)$（$f(x)<p(x)$），证明的一般“桥梁”是 $h(x)$ 在其定义域 D 内单调递增或单调递减，有 $h(m)=0$ 是恒成立的。如证明：当 $0<x<\frac{1}{b}$ 时，In（1+bx）>In（1−bx）−2bx，证明的时候先要构造 h（x）=In（1+bx）−In（1−bx）+2bx，研究导函数 h'（x）= $\frac{2b^2x^2}{1-b^2x^2}$ 的符号判断单调性，再来证明不等式的成立。

（二） 利用中值定理结合函数在给定区间上存在最大值最小值来证明“左中右”不等式的成立。

该中值定理建立起了在闭区间上的连续函数与其导数的关系，中值定理中用得最多的就是 Lagrange 中值定理。

（三）利用根的存在定理（零点定理）证明函数在某区间上根的存在。

（四）利用定积分换元积分法证明两定积分相等。

二、常考题型解析

（一）利用单调性证明不等式

近年来真题中不等式证明，通常情况下是利用构造函数的单调性证明，这种题型概率相对较高，先后在 2017 年、2019 年、2021 年、2022 年考题出现。基本入手思路是：选取构造适当的函数，构造函数前适当对不等式进行变形，经常采用左右移项，或两边乘以或除以不为零的式子等恒等变形，构造变量适当的函数辅助，研究辅助函数的单调性，一般情况下函数单调性的判断以求导数的方式进行，证明不等式通常利用辅助函数在给定区间的单调性。

例题 1.（2017 年贵州省专升本考试 *26 题）证明不等式：当 $x>1$，证明：$\ln x>\frac{x-1}{x+1}$。

例题分析：首先对不等式进行恒等变形，通过移项变形，$\ln x-\frac{x-1}{x+1}>0$，借助假设在区间 $[1,+\infty)$ 上的辅助函数 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，通过判断辅助函数 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$ 的单调性来确定最小值证明不等式，这类形式的证明题一般情况下方法指向是明确的。

证明：令 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$（$x\geq 1$），有 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}$

变形 $f'(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}$，因 $x\geq 1$，所以 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，由此 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}>0$，$\ln x>\frac{x-1}{x+1}$，得证。

（二）利用 Lagrange 中值定理证明“左中右”形式的不等式

Lagrange 中值定理是法国籍意大利裔数学家和天文学家约瑟夫・拉格朗日（Joseph Lagrange）的著名成就，它是微分中值定理的重要定理之一，重要性表现为它是连接函数与导数的桥梁。近年来贵州省专升本高等数学考试题，压轴题与微分中值定理相关的证明题出现的机会还是比较多的。这类证明题既是考试的重点也是难点，同样又是学生害怕遇到而又无法避免的难题之一，考生遇到此类题时大部分会感到无从下手，思路不对难找到问题的切入点，让学生失去解题的信心。因此，对于解决该类证明题的有效方法之一熟记 Lagrange 中值定理的条件和结论，根据原不等式适当变形找到恰当的函数，如何根据题目的结论构造出合适的

函数是解决问题的关键。

1.Lagrange 中值定理和几何意义

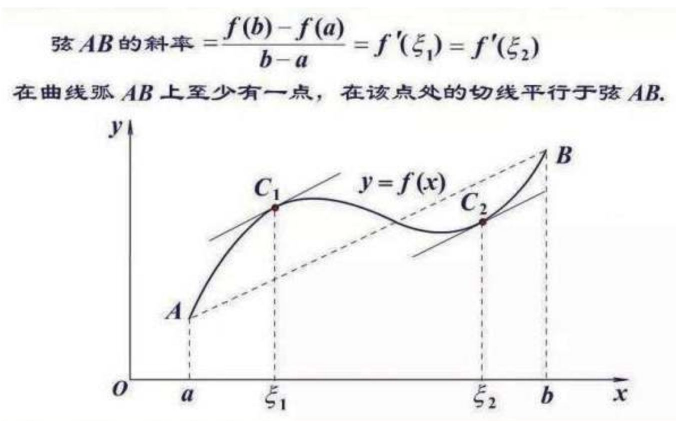
（Lagrange 中值定理）如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1）在闭区间 [a，b] 上连续，

（2）在开区间（a，b）内可导，

那么，在（a，b）内至少有一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

常用形式：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$



2.Lagrange 中值定理几何意义

如右图所示，曲线 AB 连续且端点外每一点都有不垂直于 $y=0$ 的切线，则至少存在一点 $C(\xi,f(\xi))$，$f(x)$ 在该点的切点平行于曲线两端的连线 AB，两直线平行则斜率相等，两端点连线斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，充分理解中值定理的几何意义有助于熟记并轻松应用定理解决证明题。

用 Lagrange 中值定理解决的证明题通常情况下需要在闭区间 [a，b] 构造函数，函数求导后满足 Lagrange 中值定理，联系闭区间的实际情况证明不等式。

（三）利用根的存在定理证明

根的存在定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(b)$ 和 $f(a)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。利用根的存在定理（零点定理）的证明题不常见，但也不能排除出现的可能性。

例题 2.（2020 年贵州省专升本考试 *26 题）证明方程 $x^3+x-1=0$ 只有一个根。

例题分析: 题目和明确就是证明根的存在,本题目中关键点"只有一个根"，有定理构造辅助函数 $f(x)=x^3+x-1$（$x\in R$），关键是根的存在需要找到两个区间端点 $f(x)$ 取值异号，仅有一个根需要证明函数是单调的，题目难点找到两端异号的区间，通过观察发现 $f(0)=-1, f(1)=1$。

证明：设 $f(x)=x^3+x-1$（$x\in R$），观察发现有 $f(0)=-1, f(1)=1$，根据根的存在定理（零点定理）$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，满足 $f(\xi)=0$，又因为 $f'(x)=3x^2+1>0$，所以在 R 上 $f(x)=0$ 只能有一个根，综上所述：$x^3+x-1=0$ 只有一个根，得证。

（四）利用定积分换元积分法证明定积分等式。

关于换元积分的叙述：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而 $x=\omega(t)$ 满足下列条件：

1. $x=\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数；

2. $\omega(\alpha)=a$，$\omega(\beta)=b$，且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，中间变量函数 $x=\omega(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化则有换元公式 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\omega(t)]\omega'(t)dt$。

例题 3.（2016 年贵州省专升本考试 *27 题）证明：$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

例题分析：等式两端都是定积分，方法明确就是利用换元法证明积分等式，按照换元积分要求换元换限，（原）上线对（新）上限，（原）下限对（新）下限，直接从左边积分式入手，令 $t=x^2(x>0$，得到 $x=\sqrt{t}$。

证明：令 $t=x^2(x>0$，则 $x=\sqrt{t}$，$dx=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$，且当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=a$ 时 $t=a^2$，

原等式左边 $=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}}f(t)\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}d\mathrm{t}=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$，

所以原式成立。

三、结语

在贵州省的近些年的专升本《高等数学》考试中，尽管题型和难度上各有不同，但总的来说常考题型是固定的，本文系统总结了近年来证明题出现的情况，这些知识点在整个考试大纲中占据重要地位。因此，全面总结这些真题的知识点和解题方法对备考师生都十分必要。

在整个证明题的解题过程中辅助函数扮演了重要的角色，使用的证明方法和技巧是指向明确的，充分用好已知条件选择适合辅助函数对解题来说事半功倍。建议复习备考的同学认真通过做真题系统总结知识点，对常考题型形成解题思路，看题目能够快速形成解题思路，集中精力复习纲内知识点，切忌把时间浪费在超纲的难题上。

参考文献：

[1] 彭良刚 .Lagrange 中值定理在贵州专升本数学证明题上的应用 [J]. 学科探索，2019（11）.

[2] 周千 . 高等数学中一类证明题的解题方法 [J]. 西安航空学院学报，2013（5）.

[3] 金友良 . 浙江省专升本高等数学考试证明题分析初探 [J]. 科技风，2018（11）.

作者简介：马鑫（1987-），男，贵州赫章人，讲师，主要研究方向：高等数学及教学。