

数学文化融入高中数学教学研究——以复数的概念为例

蔡安媛 陈彦恒

(重庆三峡学院 数学与统计学院 重庆万州 404100)

摘要: 结合高中数学课程教学标准和基础教育改革对数学文化渗透的要求, 本文以复数概念的教学为切入点研究了数学文化融入高中数学教学研究, 尝试在相关复数发展简史的追溯中引入复数, 引导学生在数系扩充的认知历程中建构复数的概念体系, 体会理性思维对数学演进与社会文明的双重推动作用, 以期实现数学文化在学科育人中的深层价值。

关键词: 数学文化; 高中数学教学; 复数的概念

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》着重强调了数学文化的教育价值, 提倡在教学中深入渗透数学文化, 引导学生领悟数学的文化意义^[1]。新课标明确要求, 数学教学应体现数学的应用性、历史性和社会影响力, 助力学生构建全面的数学认知。数学文化如同指南针, 为教育之路指明方向。无论是中小学教师还是大学教师, 都应深入了解数学文化的内涵与价值, 以更富人文关怀与科学精神的方式引导学生探索数学之美, 真正实现教育的长远目标。数学文化背景的融入, 使学生能更深刻地理解数学的思想精髓与独特方法, 以及杰出数学家们在数学历史长河中的卓越贡献。通过对这些历史的深入剖析, 学生能洞悉数学发展中的种种挑战, 并因此激发出更强烈的探究欲望和学习兴趣。

复数的概念是高中数学课程的重要内容, 它的发展史蕴含了丰富的数学文化, 同时又比较抽象, 一些学生在学习时可能感到困难, 缺乏兴趣, 学习效果不好。本文以复数概念的教学为切入点, 探讨数学文化融入高中数学教学研究, 以期既能优化教师的教学策略, 又能提升课堂的教学质量, 激发学生的学习兴趣 and 动力, 使二者相得益彰^[2]。

2. 复数的发展简史

史实表明, 复数最初是在研究三次方程时被数学家提出的。丢番图在《算术》中已经涉及了负数的平方根 $\Delta < 0$ 的一元二次方程的情况, 然而当时的数学家并未考虑此类方程是否有解。此后, 方程的解法逐渐推进, 当时的阿拉伯学者已经知道二次方程的根式表示以及方程有两个根的事实。数学家花拉子米在其著作《代数学》中详细论述了六种方程, 这些方程均可用 $ax^2 + bx + c = 0$ 的形式表示, 而人们关注的焦点在于这些方程是否具有实数解。随着《代数学》在13世纪传入欧洲, 欧洲的学者们开始自主从事代数研究, 但直到16世纪, 才出现了解决三次和四次方程的新进展。卡丹向塔尔塔利亚学习了解三次方程的方法, 并将其著录在《大术》中。

意大利数学家邦贝利之后引入了虚数的概念, 他利用卡丹的求根公式解出了三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 的根为 $x = -2 \pm \sqrt{3}$ 或 $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, 三次方程具有三个根, 此事驱使数学家们必须直面负数开平方的问题^[3]。17世纪荷兰数学家吉拉尔提出了“代数基本定理”, 该定理指出, 一个一元 n 次多项式方程有 n 个复数根。虽然吉拉尔对方程中出现的复数根进行了解释, 但是人们仍难以理解复数这一概念, 因此吉拉尔的观点并未被广泛承认^[4]。637年, 数学家笛卡尔在其著作《几何学》中引入了“虚数”这一术语, 意指“虚构出来的数”。

尽管众多数学家对该问题进行了研究, 但仍有许多学者不愿承认复数的存在。在复数的算术运算中常常存在诸多困惑, 因此, 欧拉提出用 i 来代替 $\sqrt{-1}$, 从而得到 $i^2 = -1$, $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ 。人们对称为 $a + bi$ 的数具有何种本质仍存在疑

问。后来, 数学家们开始探究虚数是否真实存在以及是否可以通过几何图形来表示。1806年, 数学家阿甘德在他的著作《几何作图中虚数的一个表示法》中提出了 i 的几何解释, i 可以看作是以 x 轴正方向为基础, 逆时针旋转 90° 所获得的平面直角坐标系; 这一表示法也在1797年挪威测量学家韦塞尔的题为《论方向分析法的表示: 一种尝试》的论文中被提及。挪威的测量学家韦塞尔和瑞士的数学家阿尔冈先后提出了使用平面向量来表示复数的概念^[5]。阿尔冈于1806年发表的著作《试论几何作图中虚量的表示法》详细讨论了复数的向量表示, 这种几何表示方法也被称为“阿尔冈图”^[6]。1813年, 高斯对 $a + bi$ 进行了分类命名, 将其称为复数。他采用了把虚数放在直角坐标系中表示的方法, 通过平面图形能够清晰地呈现复数的特性。然而, 欧洲人对数字的传统认知和数字逻辑的发展与此相左, 在最初的直观理解中遭遇了困难^[7]。柯西定义了复数的模为 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 并将 $a + bi$ 与 $a - bi$ 称为“共轭复数”。到19世纪中期, 意大利数学家邦贝利在《代数学》一书中指出了“虚构的数”具有以下运算性质:

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+b)+(b+d)\sqrt{-1}=(a+b)+(b+d)\sqrt{-1},$$

人们对复数的运算有了更进一步的认识。

3. 复数概念的教学设计

(一) 问题引入

问题1: 将10拆成两个数, 使其乘积分别为 $25, -11, \frac{99}{4}, 20, 40$, 则这两个数各是多少? (学生分组进行拆数游戏)

一般解法: 设一个数为 x , 则另一个数为 $10 - x$, 解5个一元二次方程 $x^2 - 10x + a = 0$, 其中 a 的取值依次为 $25, -11, \frac{99}{4}, 20, 40$, 学生通过已有的知识很快就可以解出前四个方程。前四个方程分别体现了在自然数集、整数集、有理数集、实数集内有解并判断出第5个方程在实数范围内无解。

数学史介绍: 第5个方程是16世纪意大利数学家卡丹在《大术》中提出的问题: “将10分成两部分, 使它们的乘积为40, 这两部分分别是多少?” 然而, 作为一位数学家, 他发现了一个看似简单却无解的方程, 他不愿轻易妥协, 而是希望通过深入的研究力求找到解决之道。

问题2: 除了一元二次方程的求根公式, 一元三次方程也有求根公式, 意大利数学家塔尔塔利亚就研究出了三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的求根公式:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

1572年, 意大利数学家邦贝利在《代数》一书中研究三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 时, 用因式分解得 $(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$ 解出的三个根分别为 $4, -2 \pm \sqrt{3}$, 然而用求根公式解出方程的三个根

是 $-2 \pm \sqrt{3}$ 或 $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. 同学们, 三次方程是否真的有三个根呢? 邦贝利又发现了什么?

利用作图软件几何画板, 观察函数 $f(x) = x^3 - 15x - 4$ 的图像 (图 1).

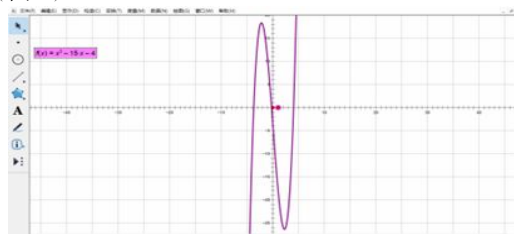


图 1 三次函数 $f(x) = x^3 - 15x - 4$ 的图像

函数图像与 x 轴有三个交点, 证实三次方程真的有三个实根。

三次方程有三个根, 同一个三次方程有完全相同的三个根, 邦贝利的发现使得实数被“负数开平方”表示了。这使得我们要解决三次方程求根公式在应用中的矛盾, 就必须接受负数可以开平方。

(二) 合情推理, 引入新数

问题 3: 在问题的第一部分中, 涉及到一个矛盾点, 即负数无法进行开平方运算, 然而在进一步探究第二个问题时, 我们发现, 为了确保方程有解, 需要允许负数进行开平方运算, 因此需要扩展数的范围。我们在之前的学习经历中是否遇到过类似情形呢?

问题阐述后, 学习者得以明确思考方向, 通过深度回顾、有效交流以及总结, 描绘出从自然数向无理数拓展的演进轨迹。

问题 4: 在今日的探讨中, 我们针对卡丹的二次方程和邦贝利的三次方程进行了深入研究, 在求解的过程中, 遭遇的困难是什么? 我们碰到的运算障碍是什么?

我们已经把问题转化为“ -1 能开平方”, 就是“方程 $x^2 = -1$ 有解”由此, 我们引入虚数单位 i , 即 $i^2 = -1$ 。现在有了虚数单位 i 后, $x^2 = -9$ 怎么解?

学生运用实数集的运算法则很快得到 $x = 3i$ 。

接着老师提问, 那你还能解决 $(x-2)^2 + 16 = 0$ 吗? 如果可以, 你可以解决一切负数开平方的问题吗?

经教师深入追问, 学生领悟: 引入 i 并遵循实数运算律, 不仅解决卡丹难题, 更可以解决所有负数开平方问题。此新规则看似合理, 却仍待验证其合理性。

数学史介绍: 著名数学家欧拉最早采用符号 i 表示虚数单位, 并将其命名为虚数单位。当时他觉得这个新数太过于虚幻, 因此将英文单词“imaginary”的首字母 i 定义为 -1 的一个平方根。虚数的概念最早由卡丹在十六世纪形式化表示, 直到十八世纪末欧拉才进行符号化表示, 这段漫长历史耗时两个多世纪。这进程表明了数学领域每一次微小步伐的艰难性。

教师总结: 把 i 叫做虚数单位, 并规定:

$$(1) i^2 = -1$$

(2) 实数可以与 i 进行四则运算, 运算时原有的关于加法与乘法的运算律仍然成立。

(三) 抽象概括, 深化理解

问题 5: 请同学们用实数 2、3 与虚数单位 i 进行四则运算。观察下列这些数, 你有什么发现吗? 能否将后面两个转化成相同的结构? 大家能归纳出引入新数后数的统一表达式吗?

$$3 + i, 3 - 2i, 2 - i, 2 + 3i, 3i, \frac{i}{3}$$

教师总结: 虚数单位 i 与实数的四则运算都可以转化为“实

数 + 实数 $\times i$ ”的形式, 用字母 a, b 代表实数, 即可写成 $a + bi$ 。我们把所有形如 $a + bi (a, b \in R)$ 的数叫做复数。全体复数所组成的集合叫做复数集, 记作 C 。复数通常用字母 z 表示, 即 $z = a + bi (a, b \in R)$ 。其中, a 叫做复数 z 的实部, b 叫做复数 z 的虚部。

问题 6: 如果两个复数的实部和虚部分别相等, 那么这两个复数有什么关系?

如果两个复数的实部和虚部分别相等, 那么我们就说这两个复数相等。

问题 7: 你知道复数集和实数集有什么区别与联系?

教师总结:

$$\text{复数: } z = a + bi (a, b \in R) \begin{cases} b = 0, \text{实数} (a = 0, b = 0, \text{实数} 0) \\ b \neq 0, \text{虚数} \begin{cases} a = 0, \text{纯虚数} (bi) \\ a \neq 0, \text{非纯虚数} \end{cases} \end{cases}$$

从中我们清楚地看到实数集和复数集之间的关系, 复数集中包含了所有的实数集, 所以实数集是复数集的真子集。

(四) 例题讲解

例 1 指出下列复数是实数还是虚数, 并说出他们的实部和虚部:

$$-2 + 3i, 3 - \sqrt{2}i, \pi, i, 7, -5 + \sqrt{2}, 0$$

例 2 当实数 m 取什么值时, 复数 $z = m + 1 + (m-1)i$ 是下列数?

(1) 实数; (2) 虚数; (3) 纯虚数

(五) 课堂小结

本节课你有什么收获?

4. 结语

数学文化的渗透是高中数学教学改革的重要方向, 其本质在于通过重构知识生成的历史脉络, 让学生在数学家突破认知困境的思维历程中, 培养数学核心素养。这种教学范式超越了单纯的知识传递, 将数学视为动态发展的文化体系, 引导学生在代数与几何的辩证统一中感悟数学理性精神。复数概念的教学正是这种文化浸润的经典案例, 其发展轨迹完整呈现了数学概念从矛盾冲突到体系重构的演进规律。

这种浸润数学文化的教学设计, 实现了三重教育价值: 在认知层面, 学生通过历史相似性经历概念创生的完整过程; 在方法论层面, 体会数学家用形式运算突破几何直观限制的创造思维; 在文化价值层面, 理解复数概念的出现如何推动代数学从方程求解工具发展为抽象结构理论。教师应进一步开发此类教学案例, 使数学课堂成为培育科学精神的文化场域, 让学生在破解历史难题的过程中, 获得数学发现的心理体验与思维跃迁。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准: 2017 年版[M]. 人民教育出版社, 2018.
- [2] 焦云梦. 数学文化融入高中圆锥曲线的教学设计研究[D]. 哈尔滨师范大学, 2023.
- [3] 李忠. 复数的故事[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [4] (美) 莫里斯·克莱因著, 张理, 张锦炎, 江泽涵译. 古今数学思想(第一册)[M]. 上海: 科学技术出版社, 2002.
- [5] 邵奇. 数学史融入高中复数教学研究[D]. 佛山科学技术学院, 2020.
- [6] 纪志刚. 从记数法到复数域: 数系理论的历史发展[J]. 上海交通大学学报(哲学社会科学版), 2003, (06): 42-47.
- [7] 冯进. 数系结构的探索与发展[J]. 常熟理工学院学报, 2007, (04): 20-25.