矩阵的幂零分解及应用

朱文杰

（安徽信息工程学院通识教育与外国语学院　安徽芜湖　241199）

摘要：幂零矩阵是矩阵中的一类特殊矩阵，具有优越的性质，在矩阵理论中有着重要的应用.本文借助幂零矩阵有关知识和一些基本性质，进一步归纳总结出幂零矩阵的性质，在此基础上把矩阵分解成幂零矩阵与其他矩阵之和的形式，再结合幂零矩阵的性质简化对矩阵求逆以及高次方幂的计算过程.

关键词：幂零矩阵；矩阵分解；逆矩阵；高次方幂

幂零矩阵是高等教育数学基础课程中的重要内容，是学生研究生入学考试的重点测试内容.在高等代数课程里，它是与线性变换、线性空间等知识联系的矩阵.通过对幂零矩阵的研究可以加深学生对相关矩阵知识的认识，从而使学生更深刻地了解高等代数的相关理论.此外，幂零矩阵的优越性质[1-2]还可以简化学生的解题过程，特别是在对矩阵多项式求解[3]的应用.由此，本文主要探讨一般矩阵如何分解成幂零矩阵与其他矩阵之和的形式，然后通过分解形式求解问题，简化计算.我们将从幂零矩阵有关知识和一些基本性质及应用的基础上，进一步归纳总结出幂零矩阵的性质，在此基础上对矩阵分解成幂零矩阵与其他矩阵之和形式，再运用幂零矩阵的性质求矩阵的逆以及矩阵的高次方幂.

1 基本概念、性质及判定定理

定义 1[2]设 $A\in P^{n\times n}$ (其中 $P^{n\times n}$ 表示数域 P 上全体 $n\times n$ 的矩阵)，如果存在正整数 m ，使得 $A^{m-1}\neq 0$ ，而 $A^m=0$ ，则称矩阵 A 是幂零指数为 m 的幂零矩阵.

在文献[4]中，韩道兰等人列举了如下 5 条幂零矩阵的优越性质，并给出了证明，这里就不再说明.

性质 1[4]　设 A 是幂零矩阵，则 A 不可逆，但 $E+A$ 及 $E-A$ 是可逆矩阵.

性质 2[4]设 A 是幂零矩阵， B 是与其可交换的一个矩阵，则它们相乘所得之积仍是幂零矩阵，且与 A 的幂零指数相同.

性质 3[4]幂零矩阵的相似矩阵还是幂零矩阵.

性质 4[4]设 n 阶矩阵 A 为 m 次幂零矩阵， n 维列向量 α 满足等式 $A^{m-1}\alpha\neq 0$ ，则向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha\cdots A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

性质 5[4]设 A 为 n 阶幂零矩阵，则 kA ， A^T 也是幂零矩阵.

运用上述所给的性质，在解题过程中会带来一定的简便性.但实际运算中，已知矩阵的阶数较大或者并不能直观看出其为幂零矩阵，这会让学生们无从下手.因此需要对已知矩阵加以判断，判断其是否为幂零矩阵，给出以下两个判断矩阵为幂零矩阵的充分必要条件.

定理 1 数域 P 上的 n 阶矩阵 A 为幂零矩阵当且仅当 A 的特征多项式为 λ^n .

推论 1 数域 P 上的 n 阶矩阵 A 为幂零矩阵当且仅当 A 的特征值为 0.

注 1　前面我们给出了幂零矩阵的数乘、转置还是幂零矩阵，那幂零矩阵的和、乘积还会是幂零矩阵吗？事实上，由推论 1，容易验证 $A+B$ 、 AB 的特征值都不全为 0.所以幂零矩阵的和、乘积一般不再是幂零矩阵.

定理 2 数域 P 上的 n 阶矩阵 A 为幂零矩阵当且仅当 A 与严格上(下)三角矩阵 B 相似.

在此基础上，由哈密顿–凯莱定理[7]，得到如下两个推论：

推论 2 数域 P 上的 n 阶幂零矩阵 A ，它的最小多项式为 λ^m ，其中 m 为幂零指数.

推论 3 数域 P 上的所有指数为 $n-1$ 的 n 阶幂零矩阵彼此相似.

上述定理和推论的证明比较简单，这里就不给出证明过程，感兴趣的同学可以尝试证明.

2 矩阵的幂零分解

上述性质体现了幂零矩阵的优越性，但是在实际运算中，题目所给的矩阵并不一定是幂零矩阵，要想利用幂零矩阵的良好性质，我们就要把已知矩阵分解成幂零矩阵才可以，以下给出将一般矩阵分解成幂零矩阵的方法.

定理 3[5]设 A 为 n 阶矩阵，则存在矩阵 B 和 C ，使得 $A=B+C$ ，且 $BC=CB$ ，其中 B 相似于对角矩阵， C 为幂零矩阵.

证明　因为任意的矩阵都会与一个若尔当矩阵相似，所以存在可逆矩阵 T ，使得

$A=T^{-1}JT$ ，

其中 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ 且 J_i $(i=1,2\cdots s)$ 是主对角线元素为 λ_i 的上三角若尔当块.

设

$$C_i=J_i-\lambda_i E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}，\ i=1,2\cdots s .$$

由于 C_i 是主对角线元素都为 0 的三角矩阵，则存在正整数 k ，使得 $(C_i)^k=0$ ， $i=1,2\cdots s$ ，即 C_i 为幂零矩阵.

记

$$B=T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_s \end{pmatrix}T 、 C=T^{-1}\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s \end{pmatrix}T ,$$

容易验证 B 相似于对角阵且 C 是幂零矩阵.且有 $A=B+C$ ，同时

$$BC=CB=T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s C_s \end{pmatrix}T .$$

例 1　设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 B 和 C ，使得 $A=B+C$ ，且 $BC=CB$ ，其中 B 为对角矩阵， C 为幂零矩阵.

解　由题意得 A 的特征多项式为 $f(A)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ，即 A 的特征值为 $\lambda_1=1$ ， $\lambda_2=\lambda_3=2$ ，且对应的特征向量分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$ ，

$\alpha_2=(0\ \ 0\ \ -1)^T$，$\alpha_3=(1\ \ 1\ \ 2)^T$.

设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$，可得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&1&0\end{pmatrix}.$$

即

$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}+P\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&1&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\-2&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&0&-1\\4&0&-2\end{pmatrix}=B+C.$$

容易证明 $BC=CB$ 且

$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$、$C^2=0$，

即 B 是可对角化矩阵，C 是幂零矩阵.

3 幂零矩阵的应用

3.1 对矩阵求逆的应用

对于矩阵的求逆方法，教材已经介绍了两种方法——定义法和初等变换法，这两种方法对于阶数较小的矩阵比较适用.当矩阵阶数较高或者矩阵的行列式不等于 1 时，此时求伴随矩阵以及使用初等变换法求逆矩阵可能出现分数，会使得计算过程会更加繁琐.通过上文，我们可以借助幂零矩阵的特性给出另外一种求逆矩阵的方法.

(1)某些矩阵可分解成幂零矩阵与单位矩阵之和的形式，再结合二项式展开定理，将原矩阵的逆矩阵转化为单位矩阵与幂零矩阵的乘幂的形式，则可求出逆矩阵.

例 2　设 $A=\begin{pmatrix}4&6&-15\\1&3&-5\\1&2&-4\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解　设 $B=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}$，则有 $B^2=0$，$A=E+B$. 根据二项式定理有

$$A^{-1}=(E+B)^{-1}=E-B=\begin{pmatrix}-2&-6&15\\-1&-1&5\\-1&-2&-5\end{pmatrix}.$$

(2)主对角线元素全部相同的三角矩阵的逆矩阵的求法.

分析：对于主对角元素全部相同的三角矩阵，可以把它表示成数量矩阵与幂零矩阵之和的形式，然后根据二项式定理，对其进行求逆.

例 3　设 $A=\begin{pmatrix}a&0&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&a&0\\1&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}$，其中 $a\neq 0$，求 A^{-1}.

解　令 $A=aE+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ 且 $B^2=0$.

根据性质得

$$A^{-1}=(aE+B)^{-1}=\frac{1}{a}E-\frac{1}{a^2}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{a}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-\frac{1}{a^2}&0&\cdots&\frac{1}{a}&0\\-\frac{1}{a^2}&0&\cdots&0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}.$$

3.2 求特殊矩阵的高次方幂

在矩阵的方幂运算中，对于阶数较大、次幂较高的矩阵相乘，如果一个一个的乘，这显然是不现实也不可能的.如果通过上面介绍的幂零矩阵的性质联合二项式定理就可以很简便的运算出来.但是并不是所有的矩阵的高次方幂都能够利用幂零矩阵，首先对矩阵是有特殊要求的，要求已知矩阵能够分解成幂零矩阵与其他矩阵的形式，这样在求高次方幂的时候就能够利用幂零矩阵的性质，当原矩阵乘幂比分解出的幂零矩阵的幂零指数大时，大于幂零指数的乘幂部分都为 0，这在一定程度上减低了运算难度.

例 4　设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}$，求 A^k.

解　将矩阵分解为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\lambda E+H,$$

其中 $H=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$. 容易验证 $H^{n-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ 且 $H^n=H^{n+1}=\cdots\cdots=O$，即 H 是幂零矩阵.

又因为单位矩阵与任意矩阵都可以交换，所以 λE 与 H 可交换，根据二项式定理展开

$$\begin{aligned}A^k&=(\lambda E+H)^k=(\lambda E)^k+C_k^1(\lambda E)^{k-1}H+C_k^2(\lambda E)^{k-2}H^2+\cdots\cdots+C_k^{n-1}(\lambda E)^{k+1-n}H^{n-1}\\&=\lambda^kE+k\lambda^{k-1}H+\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}H^2+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-n)}{(n-1)!}\lambda^{k+1-n}H^{n-1}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}&\cdots&\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-n)}{(n-1)!}\lambda^{k-n-1}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\cdots&\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-n-1)}{(n-2)!}\lambda^{k-n-2}\\0&0&\lambda^k&\cdots&\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-n-2)}{(n-3)!}\lambda^{k-n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&k\lambda^{k-1}\\0&0&0&\cdots&\lambda^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4 小结

幂零矩阵的应用在矩阵论中具有很大的作用，而本文是对幂零矩阵的性质的总结，得到了对幂零矩阵在求逆矩阵方面的简单运用，为学生们提供更好的求解思路，掌握解题技巧.

参考文献：

[1]高瑞,王蝶. 幂零矩阵性质的再探讨[J].沧州师范学院学报,2021,37(01):90-92+118.DOI:10.13834/j.cnki.czsfxyxb.2021.01.021.

[2]高瑞,魏健美. 幂零矩阵的性质 [J]. 沧州师范学院学报, 2016, 32 (01): 24-26. DOI:10.13834/j.cnki.czsfxyxb.2016.01.008.

[3]艾小川,瞿勇,李响军. 矩阵多项式方程解的存在性研究——构造线性代数"挑战性"综合题 [J]. 高等数学研究, 2024, 27 (04): 20-22.

[4]韩道兰,罗雁,黄宗文.幂零矩阵的性质及其应用[J].玉林师范学院, 2003, 23 (04): 1-3.

[5]姜琴,袁力.矩阵的幂零对角分解及推广[J].常州工学院学报, 2016,29 (03): 48-51.

[6]吴险锋. n 阶幂零矩阵的判定及构建[J].齐齐哈尔大学学报, 2007, 23 (04): 72-75.

[7]王萼芳,石生明.高等代数[M].高等教育出版社.