

# 核心素养视域下的深度教学——几何综合题

孙 珊

北京师范大学附属中学 北京 100052

**摘 要：**近几年来，北京市中考的几何综合题呈现越来越难的趋势，题目多以几何变换或特殊几何图形为背景展开命题。一方面考查学生依照文字描述准确作图的能力以及对一些常见的几何模型的基本辨识能力；另一方面，采用“问题探究——问题解决”的模式展开问题，立意新颖，构思巧妙，设问起点低，坡度大，考察学生的探究能力，题目通常以全等结构为基础，加以变化、引申呈现，多有一定的新颖性和探究性。在解题过程中，往往需要转化或还原出一些基本图形，构造出全等三角形，实现线段或角的转移。尤其是今年以来考题的探究性体现出“去模式化”的命题思路，越来越重视考察几何图形本身的性质及探究几何图形的基本方法，着重考察学生的几何直观、数形结合的思想方法，在实际教学中教师要引导学生掌握解答几何综合试题所需要用到的基本解题思路和方法，提高学生解答几何综合试题的能力，培养学生的核心素养。

**关键词：**几何综合；几何直观；数形结合

2024 年西城二模几何综合题考查的是学生灵活运用全等、直角三角形的性质、以图形的旋转、轴对称等运动为背景，在不同水平上考查学生观察和探索经过运动变化形成的新图形的性质，以及运用发现的性质解决问题的能力，试题的解法多样，为具有不同经验的学生提供更多的思考切入点。该题体现出了高质量、高难度、高区分度，题型很新颖；多少和中点有一点联系，但是考法隐蔽、用法间接，这在近些年慢慢套路化的几综题里不太多见，很好地体现了新课标中对学生能力及数学核心素养考察的要求。

本文通过对这道题的多解分析，谈一下核心素养视域下的几何综合题的教学。

## 1 问题与分析

试题呈现：

如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \alpha (0^\circ < \alpha < 30^\circ)$ ，将射线  $AB$  绕点  $A$  顺时针旋转  $2\alpha$  得到射线  $l$ ，射线  $l$  与直线  $BC$  的交点为点  $M$ 。在直线  $BC$  上截取  $MD = AB$ （点  $D$  在点  $M$  右侧），将直线  $DM$  绕点  $D$  顺时针旋转  $2\alpha$  所得直线交直线  $AM$  于点  $E$ 。

(1) 如图 1，当点  $D$  与点  $B$  重合时，补全图形并求出此时  $\angle AED$  的度数。

(2) 当点  $D$  不与点  $B$  重合时，依题意补全图 2，用等式表示线段  $ME$  与  $BC$  的数量关系，并证明。

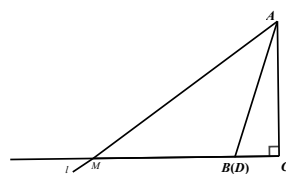


图 1



图 2

本题不是近年来常考的中点模型，关于中点常用的倍长中线，构造中位线，直角三角形中斜边中线等于斜边一半这些学生耳熟能详的方法不能直接用了，导致一部分同学考场上没有思路，出现了卡壳。分析本题的基本图形，可以发现图形中有等线段及隐藏的等角，要证  $ME=2BC$ ，需要在图

中构造出  $2BC$  或  $\frac{1}{2}ME$ ，进而构造全等三角形来证明。

## 2 一题多解分析

下面从三个维度对本题进行深入探究，为解决这类问题及几何综合题的教学提供参考。

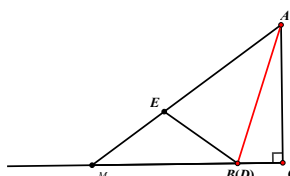


图 3

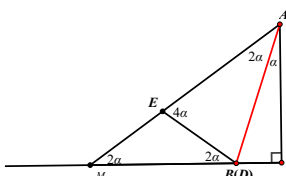


图 4

本题综合性强且没有完全给出图形，两小问都需要考生自己先根据题意画出图形才能解答，有一些学生因为不知

道如何准确画出图形而无法解答,有一些学生因为画图的速度不够快,导致不够时间完成相应题目的解答;还有一些考生虽然画出了图形,但是因为分析图形和题意的能力不够而无法得出解题思路,造成这些问题的一个很重要的原因是考生们的直观想象素养不足,义教新课标中明确提出要培养学生的直观想象能力,因此在教学中我们要注重对学生几何直观的训练。

第一问补全图形如图 2,要求得  $\angle AED$  的大小,教会学生尽可能地用参数  $\alpha$  表示出所有能表示的角,根据三角形的内角和,从而解决问题。

第二问难度比较大,具有抽象程度高、综合性强、与图形联系紧密的特点,要证明线段之间的数量关系,离不开数形结合的思想,利用数形结合的思想探索解题思路是直观想象素养的内涵,我国著名数学家华罗庚曾说过:“形缺数时难入微,数缺形时少直观。”运用数形结合的思想探究几何综合题的解法,把题目的已知条件和需要求证或求解的问题放到图形中去,能更直观地发现图中各个图形之间的数量关系和位置关系,有助于找到已知条件和问题之间的联系,进而探究出解法。这个探究过程,借助图形化抽象为直观,有利于突破题目难点,不仅能提高学生的解题能力,还能提升学生的直观想象素养。下面将从三个维度分析,如图 5,补全图形。

### 2.1 合情推理猜测

合情推理是根据已有的事实和知识来推测某些结果,在几何综合题中根据图形特征大胆猜测、合情推理是经常用到的方法。本小问要证明线段  $ME$  和  $BC$  的关系,学生可以根据图形特征、利用几何直观大胆猜测两线段之间的关系,进而利用手里的工具(圆规或尺子)进行测量验证,最后合理论证。

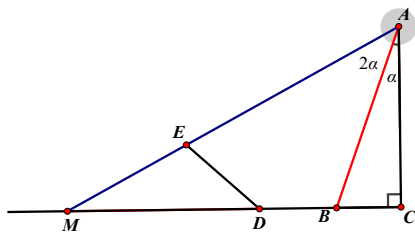


图 5

### 2.2 多种解法, 灵活思维

几何综合题综合性强, 图形复杂, 考察知识点多, 我

们要带领学生将问题研究透, 所以要做到一题多解, 锻炼学生的思维, 拓展学生的解题思路, 提高学生的解题能力。

要证两条线段之间的关系, 主要从以下三个思路着手解决。

【思路一】在图中构造  $2BC$ , 证明  $ME=2BC$ , 一边一角截长补短构造全等 + 等腰三角形证明。

方法一: 由  $BC$  所在的  $Rt\triangle ABC$  很容易想到倍长  $BC$ , 使得  $BF = 2BC$ 。

由已知条件截取  $AQ = DE$ , 利用 SAS 构造全等三角形, 如图 6 所示, 由  $\triangle AQB \cong \triangle DEM$  可得  $BQ = ME$ , 若要证明  $BF = ME$ , 只需证明  $BF = BQ$ 。如何证明  $BF = BQ$ ? 这个问题难住了一些学生, 引导学生观察四边形  $AQBF$ , 如图 7, 可以发现  $\angle QAB = \angle FAB = 2\alpha$ , 过点  $B$  分别向线段  $AM$ 、 $AF$  上作垂线段, 根据角平分线的性质, 可得  $BM = BN$ , 由  $\triangle BMQ \cong \triangle BNF$ , 进而得到  $BF = BQ$ 。

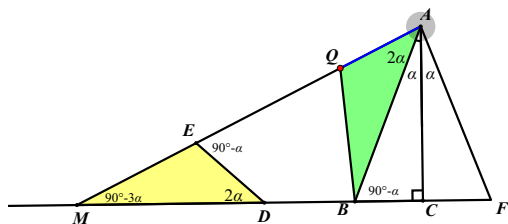


图 6

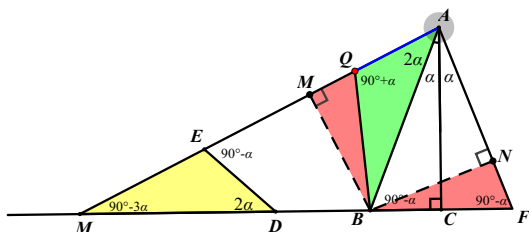


图 7

方法二: 本方法还可以继续引导学生观察四边形  $AQBF$ , 如图 8, 用  $\alpha$  表示四边形的各个角, 容易看出  $\angle AQB + \angle AFB = 180^\circ$ , 进而说明点  $A$ 、 $Q$ 、 $B$ 、 $F$  四点共圆, 利用圆中弧、圆周角、弦之间的关系说明  $BF = BQ$ 。

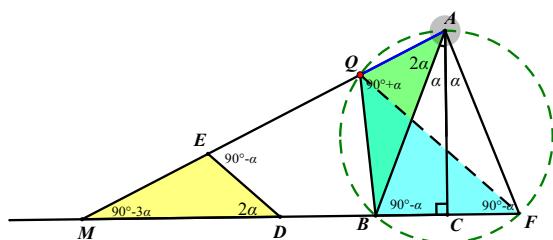


图 8

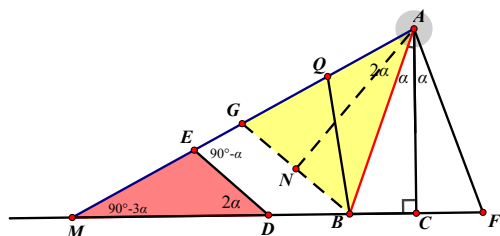


图 9

本题还可以用对称全等来证明, 如图 9, 可知  $\triangle AGB \cong \triangle AFB$ , 由等腰三角形  $\triangle GBQ$  可证.  
方法三:

由图中  $DM = AB$ ,  $\angle MDE = \angle BAG$ , 如图 10, 作  $DE = AG$ , 构造  $\triangle BGA \cong \triangle MED$ , 可得  $\angle BGA = \angle MED$ , 进而推出  $\angle BGF = \angle DEA = \angle F = 90^\circ - \alpha$ , 所以  $BG = BF$ .

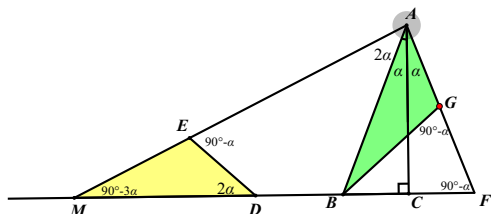


图 10

【思路二】一边一角旋转得全等三角形, 根据题意, 将线段  $DE$  绕点  $D$  顺时针旋转  $2\alpha$  到  $DK$ , 如图 11,  $\triangle DMK \cong \triangle AFB$ , 可得  $MK = FB$ , 再由  $\angle K = \angle MEK$ , 得到  $ME = BF$ .

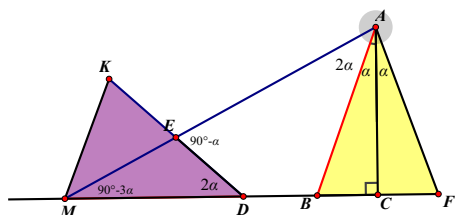


图 11

【思路三】题目证明线段的 2 倍关系, 和中点有关, 利用中位线定理, 构造全等三角形, 如图 12. 取线段  $DM$  和  $DE$  的中点, 由中位线的性质定理, 可得  $PQ = \frac{1}{2}ME$  且  $PQ \parallel ME$ . 取  $AB$  的中点  $R$ ,  $CR$  的中点  $S$ , 可得  $\triangle DPQ \cong \triangle RBS$ , 由等腰三角形  $\triangle BCS$  可得证.

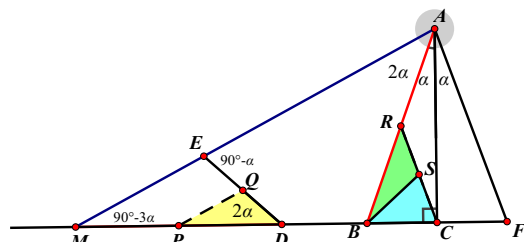


图 12

### 2.3 追根溯源, 把握本质

题目要证两条线段之间的关系, 回归数学本质, 通过计算证明, 可以用正余弦定理来解决.

如图 13, 过点  $B$  作  $BF \perp AB'$ , 则  $BF = AB \sin 2\alpha$ ,  $AC = AB \sin(90^\circ - \alpha)$ ,  $BC = AB \sin \alpha$ ,  

$$S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{2} AB' \cdot BF = \frac{1}{2} BB' \cdot AC$$
 , 即  $\frac{1}{2} AB' \cdot AB \sin 2\alpha = \frac{1}{2} BB' \cdot AB \sin(90^\circ - \alpha)$ ,

同理,  

$$S_{\triangle DEM} = \frac{1}{2} MD \cdot DE \sin 2\alpha = \frac{1}{2} DE \cdot ME \sin(90^\circ + \alpha)$$
 ,  
 因为  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,

所以  $MD \cdot DE 2 \sin \alpha \cos \alpha = ME \cos \alpha$ , 即  $ME = 2MD \sin \alpha = 2AB \sin \alpha = 2BC$ .

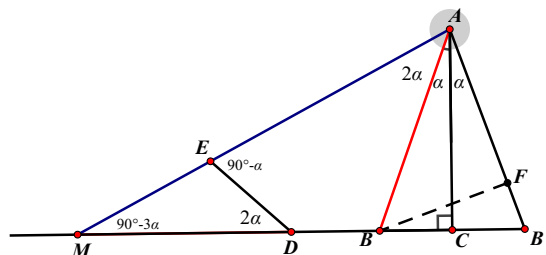


图 13

上述三个维度的分析, 每一维度均让学生根据已知条件或已有结论观察图形, 直观感知图中各个图形之间的位置和数量关系, 进而寻找证明思路, 一步步从已知条件走到需要证明的结论. 学生经历了试题解法的探究过程, 积累了课

堂基本活动经验,锻炼了学生根据图形和已知条件正确作出辅助线、从图形获取有用信息进行解题的能力,培养了学生灵活运用数形结合的思想,利用几何直观理解和解决数学问题的能力。

从以上三个维度的分析可以看出,在教授学生解决几何问题时,要关注以下几点:

1. 认真审题,利用好工具精准补图,边补图边观察图形特征; 2. 题目背景模型不清晰的题目可以尝试先设参标角,找到隐藏的等角,发现可构造的全等三角形; 图形较复杂,等线段较多时用字母参数表示等线段,找到隐藏的等线段。 3. 引导学生条件上图,关注题目背景图形和图形变换方式,寻找基本解题模型,挖掘隐含条件、各小问之间的联系,寻找解题思路。做题过程中要适时回头读题,关注题目中已知条件和前面一问的结论。

### 3 核心素养视域下几何综合试题的教学建议

通过对上题的分析、探究及小结,令我对提高综合问题的解题能力以及对后续教学有更多新的认识及许多启示。

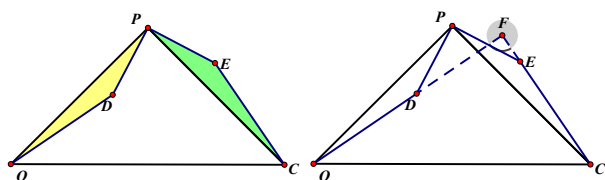
几何综合题的解决,主要是通过逻辑推理和几何计算的方法来探究或求解一些新的、未知的结论。也就是要创造条件实现由已知向未知的转化,即由因果果,执果索因。几何综合题是知识、方法、能力全方位考查的综合型试题,具有知识容量大、解题方法活、能力要求高等特点。要帮助学生解决几何问题,平时的教学中除了要重视基本知识、基本方法的落实外,还可以帮助学生提炼一些基本图形。为了使问题简单化,使解题思路清晰化,使问题迎刃而解,要教会学生从复杂问题中抽象出来的基本图形,基本图形抽象的过程就是学生认识数学知识本质属性的过程,在这个过程中才能培养学生的几何直观。

下面举例说明几个重要的图形及性质应用。

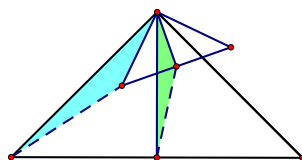
#### 3.1 等腰三角形

几何综合题一般以旋转、轴对称为背景,所以等腰三角形的性质就尤为重要,所以在平时的教学中要帮助学生积累掌握等腰三角形的有关性质及常见的解决方法。比如以下几点:

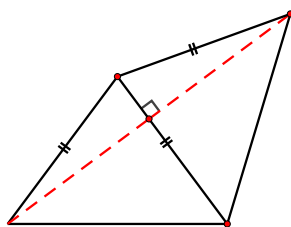
1、共端点等线长,手拉手全等(旋转全等)模型中的常见结论:三组对应边相等、三组对应角相等,三组对应边的夹角相等。



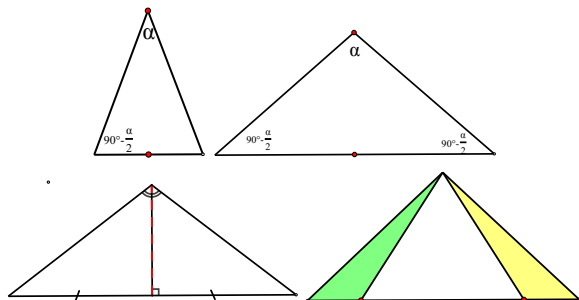
2、共端点倍分线段旋转中的相似三角形模型中常见结论:三组对应边乘比例、三组对应角相等。



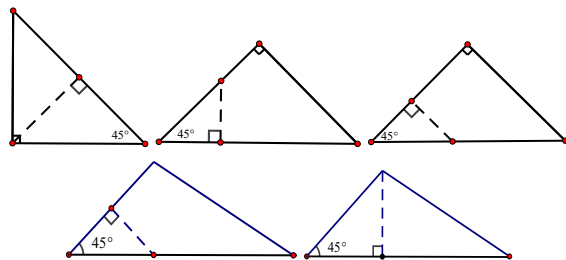
3、共端点的等腰三角形中相关角的计算问题:在两个等腰三角形中计算角。



4、等腰三角形的轴对称性:角度的计算、三线合一性质的应用、对称全等等性质。



5、等腰直角三角形:题目中含有  $45^\circ$  时,构造等腰直角三角形,利用等腰直角三角形的性质解决问题。

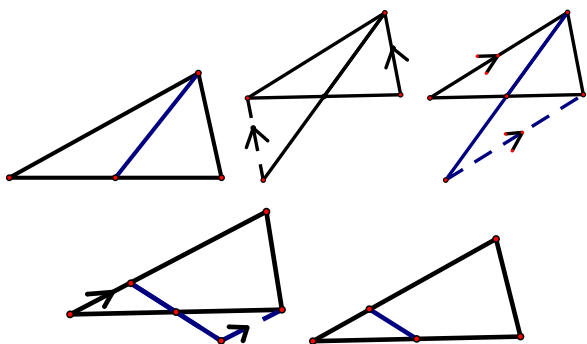


#### 3.2 中点相关问题

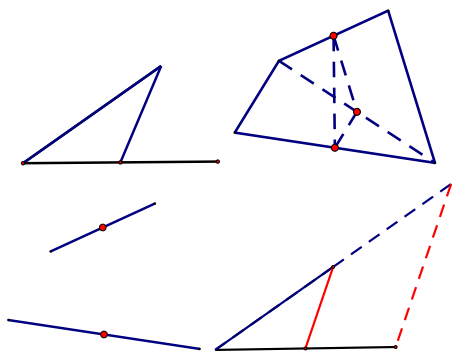
近几年北京中考题一般以中点为背景,关于中点的问题方法很多,涉及到的知识点和方法主要有:倍长中线、中

位线的构造、直角三角形中斜边中线等于斜边一半等。

1、倍长中线：倍长中线是学生特别擅长用的方法，但是构造“8”字后学生容易忘记关注平行，要提醒学生关注平行倒角。



2、构造中位线：让学生在复杂的图形中快速识别“小旗子”模型，并能构造三角形的中位线，遇到“双中点”时也能构造“双中位线”，利用三角形中位线的性质解决问题。



### 3.3 角平分线的性质

初中几何中角平分线的性质用的也非常多，学生可以掌握利用角平分线构造全等的方法。



综上，想要带领学生突破中考中的几何综合题，就要从多个角度研究试题，做到一题多解，多解归一，带领学生研究几何图形的基本性质及研究的基本方法，提高学生分析问题的能力，提升学生的核心素养。

#### 参考文献：

- [1] 义务教育课程核心标准【2022】
- [2] 谢玉平 基于核心素养的数学单元教学 中学数学学参考 (上旬)2019(5)
- [3] 缪娟 突破思维障碍 提升数学素养 中学数学学参考 (中旬)2024 (4)

作者简介：孙珊（1984—），女，汉族，硕士研究生，研究方向为基础数学。