

# 构建力的矢量三角形解决动态平衡问题

廖敦利 贾战利 马瑜薇

北京市第二中学 北京 100010

**摘要:** 动态平衡问题是高中力学的重要内容, 主要研究物体通过缓慢改变某些条件始终处于一系列平衡状态。本文从矢量三角形关系入手, 提出利用力的矢量三角形直观分析动态平衡的方法。通过“一恒一定向”、“一恒一定大/一定角”、“一恒二变向”、“晾衣架模型”、“摩擦角”等情景, 构建力的封闭三角形模型, 将抽象的力学平衡转化为直观的几何图像。总结的六种解题思路揭示了各种力随条件变化的规律, 既简化了问题求解, 又培养了学生数形结合的物理建模思维。文章结论对高中物理教学中培养学生处理动态平衡问题的分析能力具有重要借鉴价值。

**关键词:** 动态平衡; 三力平衡; 矢量三角形; 图解法

动态平衡是指通过调控特定物理量, 使物体所受外力发生准静态变化的过程。在此过程中, 系统始终满足“缓慢变化”条件(即变化时间尺度远大于系统弛豫时间), 因而物体在任意瞬时均可视为处于平衡态。根据牛顿第二定律, 动态平衡系统的合外力必须满足  $\Sigma F=0$  的矢量条件。当物体受三力作用处于平衡状态时, 其三个力的矢量关系可表征为闭合三角形。即, 当任意两个力的大小或方向发生改变时, 只要系统保持平衡, 力三角形仍保持闭合状态, 仅发生几何形变。通过比较不同平衡状态下力的矢量三角形的几何特征(如边长比、夹角变化等), 既可以直观判断各力大小的变化, 又可定量推导各力的大小变化规律。因此, 如能掌握构建力的矢量三角形的方法, 将显著简化在此类问题的求解过程中利用传统正交分解法带来的复杂计算。

下面我们就从六个方面来体会如何构建力的矢量三角形:

## 1 动态三角形解决“一恒一定向”问题

“一恒一定向”问题是指研究对象在三个共点力作用下处于静力学平衡状态, 三力满足以下条件: 一个是恒力( $F_1$ ): 大小和方向均保持不变; 一个是恒方向变力( $F_2$ ): 方向固定, 但其大小可变化; 一个全变力( $F_3$ ): 大小和方向均可调整, 以维持系统平衡。

**例 1** 如图 1 所示, 用轻质不可伸长的细绳 AO、BO 悬挂一个重物, 其中绳 BO 水平, O 为半圆形支架的圆心, 悬点 A 和 B 在支架上。悬点 A 和圆心 O 固定不动, 试分析将悬点 B 从如图所示位置沿着圆弧缓慢移动到 C 点的过程中, 绳 OA 和绳 OB 上的拉力的大小变化情况。

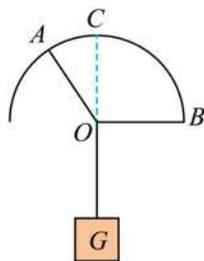


图 1 一恒一定向问题图

**解析** 根据题意可知, 结点 O 在三个共点力的作用下处于平衡状态, 先画出结点 O 初态平衡时力的矢量三角形, 用竖直向下的有向线段表示结点 O 受到的竖直向下的拉力  $F_{\text{拉}}$  (大小等于  $mg$ ), 从结点 O 出发, 竖直向下绘制适当长短的有向线段代表  $F_{\text{拉}}$  (大小等于  $mg$ ), 以  $F_{\text{拉}}$  箭头端为起点绘制沿 OB 方向的有向线段表示绳 OB 提供的拉力  $F_{\text{OB}}$ , 调整有向线段 OB 的长短, 使得从拉力  $F_{\text{OB}}$  的箭头端出发绘制的与绳 OA 平行的有向线段的终端恰好与  $F_{\text{拉}}$  (大小等于  $mg$ ) 起始端相交, 构成一个闭合的力的矢量三角形。悬点 B 沿圆弧缓慢移动到 C 的过程中, 观察已绘制的力的矢量三角形, 保持  $F_{\text{拉}}$  (大小等于  $mg$ ) 所在边的大小方向均不变, 逆时针转动有向线段  $F_{\text{OB}}$ , 使其终点与有向线段  $F_{\text{OA}}$  相交, 注意, 在上述转动过程中要保证有向线段  $F_{\text{OA}}$  方向不变、终点不变, 三个力始终可以构成一个动态的力的矢量三角形(如图 2)。从图 2 力的矢量三角形容易看出, 将悬点 B 从如图所示位置缓慢移动到 C 的过程中, 轻绳 OA 上的拉力  $F_{\text{OA}}$  逐渐变小, 轻绳 OB 上的拉力  $F_{\text{OB}}$  先减小后增大, 当  $F_{\text{OB}} \perp F_{\text{OA}}$  时,  $F_{\text{OB}}$  有最小值。

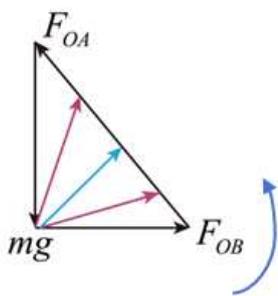


图 2 一恒一定向解析图

综上，处理此类问题的步骤如下：

①绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

②绘制力的矢量三角形动态变化：保持基准边不变，并保持恒变力的有向线段方向不变，以恒力的终点为转轴根据问题要求转动全变力，使得全变力的终点与恒变力对应线段相交，由此构成一系列闭合的力的矢量三角形

③观察各力的变化：根据力的矢量三角形的动态变化图，即可判断各力的大小和方向变化情况。

## 2 辅助圆法解决“一恒一定大或一恒一定角”问题

### 2.1 一恒一定大

“一恒一定大”问题是指研究对象在三个共点力作用下处于静力学平衡状态，三力满足以下条件：一个是恒力 ( $F_1$ )：大小和方向均保持不变；一个是定大变角力 ( $F_2$ )：大小恒定，但其方向可随系统状态变化；一个是全变力 ( $F_3$ )：大小和方向均可调整，以维持平衡条件。

例2 如图3所示，质量为  $m$  的小球 A 用轻绳悬挂于 O 点，用力  $F$  ( $F < mg$ ) 拉住小球，使小球保持静止。现使  $F$  保持大小不变，由水平位置缓慢旋转到竖直位置。试分析在拉力  $F$  缓慢旋转过程中，轻绳 OA 中的拉力 T 的大小和方向如何变化？

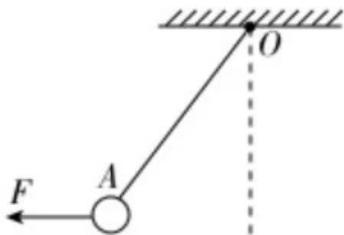


图 3 一恒一定大问题图

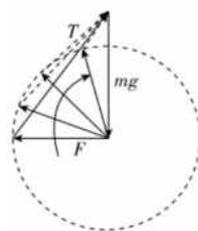


图 4 一恒一定大解析图

解析 如图4所示，先绘制小球 A 初始状态所受重力  $mg$ 、拉力  $F$  和绳的拉力  $T$  的力的矢量三角形，接着以恒力 (重力) 的箭头端作为圆心，以拉力  $F$  的大小作为半径，绘制如图所示的辅助圆。从辅助圆上易得，以  $F$  为半径顺时针旋转所构成的一系列力的矢量三角形中绳子的拉力  $T$  在逐渐减小，同时从图中还可以看出，OA 绳子所受的拉力  $T$  与竖直方向的夹角先增大后减小，当拉力  $F$  与拉力  $T$  垂直时，绳子 OA 有最大偏角。

综上，处理此类问题的步骤如下：

①绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

②构建辅助圆：画出初态力的矢量三角形后，以表示恒力的有向线段的箭头端为圆心，以表示大小不变方向发生变化的力的有向线段为半径做辅助圆，绘制从圆上任意一点到恒力对应的有向线段起点的有向线段，该线段就是动态变化过程中对应的全变力，由此构成一系列闭合的力的矢量三角形。

③观察力的变化：根据力的矢量三角形的动态变化图，即可判断各力的大小和方向变化情况。

### 2.2 一恒一定角

“一恒一定角”问题是指研究对象在三个共点力作用下处于静力学平衡状态，三力满足以下条件：一个是恒力 ( $F_1$ )：大小和方向均保持不变；另两个力 ( $F_2$ 、 $F_3$ ) 间夹角恒定，但两个力的方向均变化，以维持平衡条件。

例3 如图5所示，半径为  $R$  的圆环竖直放置，长度为  $R$  的不可伸长的轻细绳 OA、OB，一端固定在圆环上，另一端在圆心 O 处连接并悬挂一质量为  $m$  的重物，初始时 OA 绳处于水平状态，把圆环沿地面向右缓慢转动，直到 OA 绳处于竖直状态，在这个缓慢转动的过程中，下列分析正确的选项是 ( )

- A. OA 绳的拉力逐渐增大
- B. OA 绳的拉力先增大后减小
- C. OB 绳的拉力先增大后减小
- D. OB 绳的拉力先减小后增大

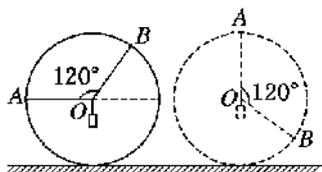


图 5 一恒一定角问题图

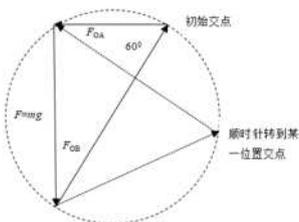


图 6 一恒一定角解析图

**解析** 如图 6 所示，先画出结点 O 点初始状态所受竖直向下的拉力  $F$ （大小等于物体的重力  $G$ ）、绳 OA 拉力  $F_{OA}$  和绳 OB 拉力  $F_{OB}$  的力的矢量三角形。已知：把圆环沿地面向右缓慢转动的过程中，重力的大小和方向始终保持不变，拉力  $F_{OA}$  和拉力  $F_{OB}$  之间的夹角（ $60^\circ$ ）保持不变，联想外接圆的性质可绘制初始状态对应的力的矢量三角形的外接圆，表示竖直向下的拉力  $F$  的有向线段是这个圆的一条弦，它所对应的圆周角保持不变，随着圆环顺时针转动的过程中，表示拉力  $F_{OA}$  和拉力  $F_{OB}$  的两条有向线段的交点在外接圆上缓慢移动，如图 6 所示易得，表示拉力  $F_{OA}$  的有向线段从水平向左变成竖直向上的过程中，其大小满足先变大后变小；表示拉力  $F_{OB}$  的有向线段的长度从初始状态的直径逐渐变短，所以拉力  $F_{OB}$  一直变小。故正确答案为 B。

综上，处理此类问题的步骤如下：

①绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

②构建辅助圆：做出初态力的矢量三角形的外接圆，其中表示恒力的有向线段是圆的一条不变的弦，它所对的圆周角不变，当表示两个变力的有向线段的交点在圆上移动时，形成一系列的力的矢量三角形，且能保证在交点缓慢移动的过程中两个变力的夹角不变。

③观察力的变化：根据力的矢量三角形的动态变化图，即可判断各力的大小和方向变化情况。

### 3 相似三角形法解决“一恒二变向”问题

“一恒一定角”问题是指研究对象在三个共点力作用下处于静力学平衡状态，三力满足以下条件：一个是恒力（ $F_1$ ）：大小和方向均保持不变；另两个力（ $F_2$ 、 $F_3$ ）间夹角变化，方向也变化，但仍能维持研究对象平衡。

**例 4** 如图 7 所示，半圆球 P 的半径为  $R$ ，其被固定在水平面上，球心  $O_1$  的正上方有一光滑的小定滑轮被固定在水平天花板上的 A 点，A 点到 P 的最高点的距离为  $h$ ，在 P 上放一个光滑的空心小球 Q，Q 内装有细沙，其球心为  $O_2$ ，Q 的半径为  $r$ 。将一根轻绳绕过定滑轮后系住 Q，现用力拉动轻绳的另一端使 Q 缓慢上升，同时使细沙从 Q 底部的小孔缓慢均匀地流出。在以后的过程中，试分析绳对 Q 的拉力和 P 对 Q 的弹力变化情况。

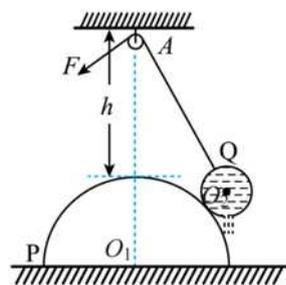


图 7 一恒二变向问题图

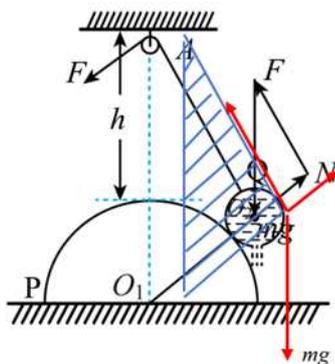


图 8 一恒二变向解析图

**解析** 对 Q 受力分析如图 8 所示，设其重力为  $mg$ ，由于有一部分细沙缓慢流出而减小，绳对 Q 的拉力  $F$  和 P 对 Q 的弹力  $N$  在 Q 缓慢上移时两者均发生改变，两力方向间的夹角也发生改变，Q 的重心虽然在变，但重心一定在过  $O_2$  的竖直线上，观察图 8 易得，Q 所受重力、支持力和拉力所构成的力学矢量三角形与阴影部分对应得  $\triangle O_1A O_2$  始终满

足相似三角形的条件。设小滑轮右侧的绳长为  $x$ ，可列出相似三角形对应变成比例得表达式： $\frac{mg}{h+R} = \frac{N}{R+r} = \frac{F}{x+r}$ ，式中的  $(h+R)$ 、 $(R+r)$  均不变，当缓慢拉动  $Q$  的过程中， $Q$  所受重力  $mg$  在缓慢减小，绳长  $x$  在减小，可判知绳对  $Q$  的拉力  $F$  减小， $P$  对  $Q$  的弹力  $N$  也减小。

综上，处理此类问题的步骤如下：

①绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

②找相似三角形：做出初态力的矢量三角形后，寻找在之后缓慢变化过程中，与这个力的矢量三角形相似的几何三角形。

③观察力的变化：根据力的矢量三角形和几何三角形对应边成比例，可以分析出各力如何变化。

#### 4. 利用对称性解决“晾衣架模型”问题

“晾衣架模型”问题是指光滑轻绳的长度不变，两端系在竖直杆上，悬挂物体的挂钩是光滑的，无论轻绳两端固定高度如何，挂钩上的物体都能够保持平衡状态。

例 5 (多选) 如图 9 所示，轻质不可伸长的晾衣绳两端分别固定在竖直杆  $M$ 、 $N$  上的  $a$ 、 $b$  两点，悬挂衣服的衣架挂钩是光滑的，挂于绳上处于静止状态。如果只人为改变下面得某一个条件，试分析衣架静止时，下列说法正确的是 ( )

- A. 绳的右端上移到  $b'$ ，绳子拉力不变
- B. 将杆  $N$  向右移一些，绳子拉力变大
- C. 绳的两端高度差越小，绳子拉力越小
- D. 若换挂质量更大的衣服，则衣架悬挂点右移

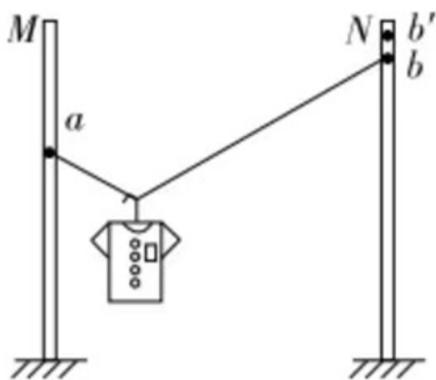


图 9 晾衣架模型问题图

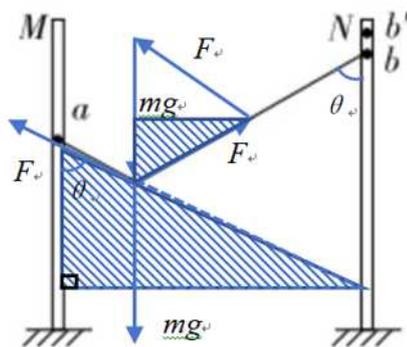


图 10 晾衣架模型解析图

解析 已知光滑轻绳不可伸长且衣架挂钩是光滑的，因此挂钩两侧绳子所受拉力大小相等，根据对称性可知，挂钩两侧绳子与竖直方向的夹角相等，设为  $\theta$ 。以挂钩为研究对象，如图 10 所示，可画出初始状态力的矢量三角形，延长挂钩左侧绳子与  $N$  杆相交。由两侧夹角相等，易证虚线部分的长度与挂钩右侧的绳长相等，易得，当绳的右端上移到  $b'$  时，轻绳长度  $L$  和两竖直杆的宽度  $d$  都不变，所以  $\theta$  也不变，结合图 10 中两个阴影对应的三角形始终相似可知，易得绳子拉力  $F$  不变，选项 A 正确；相似三角形可求得轻绳所受拉力，当轻绳长度  $L$  和两竖直杆的宽度  $d$  不变时，轻绳所受拉力保持不变，因此选项 C 错误；同理可得，角度与衣物质量无关，选项 D 也错误。当两竖直杆的宽度  $d$  变化时，根据  $\sin \theta = \frac{d}{L}$  可得，绳子与竖直方向的夹角也随之变化，动态力的矢量三角形也随之变化，由图 10 可直观地看出拉力的变化情况，则选项 B 正确；所以正确答案为 AB。

综上，处理此类问题的步骤如下：

①绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

②找相似三角形：做出初态力的矢量三角形后，利用对称性寻找与这个力的矢量三角形相似的几何三角形。

③观察力的变化：根据力的矢量三角形和几何三角形对应边成比例，可以分析出各力如何变化。

#### 5 利用摩擦角法解决有滑动摩擦力参与的动态平衡问题

定义物体所受支持力和摩擦力的合力为全反力，全反力与支持力的夹角称为摩擦角（用  $\varphi$  表示），则  $\tan \varphi = \frac{f}{N}$ ，

当  $f$  是滑动摩擦力时  $\frac{f}{N} = \mu$  是定值。因此在遇到有滑动摩擦力参与的四力平衡问题，适当考虑引入摩擦角可将四力平衡转化成三力平衡，进而利用力的矢量三角形解决对应问题。

例 6 如图 11 所示，质量为  $m$  的物体放在水平面上，物体与水平面间的动摩擦因数  $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，重力加速度为  $g$ ，在拉力  $F$  作用下做匀速直线运动。当拉力  $F$  与水平方向的夹角  $\theta$  发生变化时，为了维持物体的匀速直线运动，拉力  $F$  的大小也会发生变化。试分析拉力  $F$  的大小随拉力与水平方向的夹角  $\theta$  的增大如何变化？

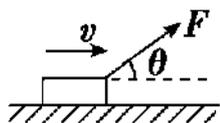


图 11 借助摩擦角解决动态平衡问题图

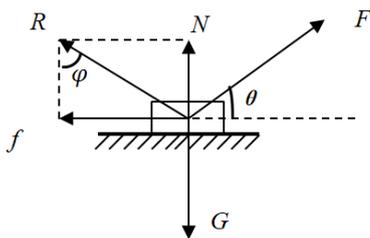


图 12 借助摩擦角解决动态平衡受力分析图

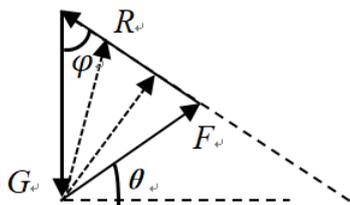


图 13 借助摩擦角解决动态平衡解析图

**解析** 物体受力分析如图 12 所示，在四个力的作用下保持平衡，当拉力  $F$  的方向和大小发生变化时，地面给物体的支持力  $N$  和滑动摩擦力  $f$  也随之变化，但是  $N$  和  $f$  的合力  $R$  方向不会发生变化，设合力  $R$  与支持力  $N$  成角  $\varphi$ ，则  $\tan \varphi = \frac{f}{N} = \mu$ ，合力  $R$  称为全反力， $\varphi$  为摩擦角，由题干信息可求得本题的摩擦角为  $30^\circ$ 。用全反力  $R$  等效替代支持力  $N$  和滑动摩擦力  $f$ ，这样物体相当于只受到重力  $G$ 、全反力  $R$  和拉力  $F$  三个力，可以转化为力的矢量三角形解决（如图 13 所示）。因为重力  $G$  的大小和方向均不变，全反力  $R$  的方向不变，随着拉力  $F$  与水平方向的夹角逐渐变大，

拉力  $F$  先变小再变大，当拉力  $F$  与全反力  $R$  垂直时，拉力  $F$  取得最小  $F_{\min} = mg \sin \varphi = mg \sin 30^\circ = \frac{1}{2} mg$ 。

综上，处理此类问题的步骤如下：

①把支持力和滑动摩擦力用全反力替代；

②绘制初态力的矢量三角形：以表示恒力的有向线段为基准边，根据题干信息绘制另外两个变力的有向线段，使之首尾相连构成封闭三角形；

③观察力的变化：根据力的矢量三角形和几何三角形对应边成比例，可以分析出各力如何变化。

### 6 总结提升

力的动态平衡问题的研究过程揭示了矢量关系与几何特征的辩证统一。通过构建力的矢量三角形，可将抽象的力学平衡转化为直观的几何分析，既揭示了力的动态变化规律，又实现了复杂问题的数学简化。本文系统提出的动态三角形法、辅助圆法、相似三角形法、对称性分析及摩擦角法等五大方法，本质上是通过多维视角实现“力 $\leftrightarrow$ 形”转化范式。这些方法不仅是有效的解题工具，更是培养物理思维的重要载体。教学实践表明，通过数形结合的训练，学生能深入理解平衡条件的物理本质，显著提升从力学现象中抽象几何模型的能力。这种方法的系统训练，对发展学生的动态分析能力具有显著效果，为后续非共点力平衡和刚体力学学习奠定了重要基础。掌握这些核心方法，将有助于在工程实践与物理研究中实现“静动相济，简繁互驭”。

### 参考文献：

[1] 教育部. 普通高中物理课程标准 (2022 年版·2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2022.

[2] 蔡晓华, 胡扬洋, 童大振. 为物理知识整合而教——对“力的作用效果”的澄清及其启示 [J]. 湖南中学物理, 2024(9): 32-34.

[3] 倪玲燕. 运用不同三角形巧解三力动态平衡问题 [J]. 数理天地 (高中版), 2025(2): 2-3.

**作者简介:** 廖敦利 (1978—), 男, 汉族, 硕士研究生学历, 中学高级教师, 研究方向: 物理课程与教学论。

**通讯作者:** 贾战利 (1978—), 女, 1978.7, 汉族, 中学高级教师, 教育硕士, 研究方向: 物理课程与教学论。

**基金项目:** 本文系北京市物理学会 2024-2025 教育学科重点课题“课程视域下高中物理必修 1 单元作业涉及实践研究” (课题编号: WLXH241025) 研究成果。