

指向运算能力培养的整式乘除运算错因分析及对策研究

刘倩倩 刘慧敏 唐玉玲 *

河西学院数学学院 甘肃张掖 734000

摘 要: 运算能力作为数学学习重要的核心素养之一,贯穿于学生学习的各个阶段,而整式的乘除作为初中数学“数与代数”领域的重点内容,在培养学生运算能力方面发挥着重要作用。本文以北师大版教材七年级下册整式的乘除为例,分析学生在解决整式乘除运算问题时出现错误的原因,进而提出应对策略,以提高学生的数学运算能力。

关键词: 初中数学;运算能力;整式乘除运算

《义务教育数学课程标准(2022年版)》^[1]指出,运算能力是义务教育阶段学生需要培养的核心素养之一,主要是指根据运算法则和运算律进行正确运算的能力,学生具备了运算素养,便能够理清算法和算理之间的关系,选择合理简洁的运算策略解决问题,进一步促进数学推理能力的发展。运算能力的培养是一个系统而深入的过程,需要系统的教学策略和科学的学习方法,当学生在运算过程中出现错误时,教师不应简单地将学生的错误归因于粗心大意,而因仔细分析学生产生错误的原因,并针对性地为学生提供帮助和指导。

北师大版教材七年级下册第一章的内容是整式的乘除,该内容不仅与学生上册学习过的有理数的四则运算和整式的加减运算息息相关,而且还对学生后续学习因式分解和分式方程有着重要的影响,想要降低学生在整式的乘除运算方面的出错频率,提高学生的运算能力,不仅需要从整式的乘除运算程序上进行错误成因分析,还需要从学生对整式乘除运算的算理、算法及法则的掌握程度上进行分析,只有找到问题产生的根源,才能杜绝同样的错误重复出现。

本文从学生的数学运算能力角度出发,以北师大版教材七年级下册整式的乘除内容为主,通过整理学生的作业和试卷,采用问卷调查等方式,探讨学生在整式乘除运算中出

现的错误类型及成因,并给出相应的解决策略以便提高初中生的数学运算能力。

1. 整式的乘除常见错误剖析

笔者首先利用见习期收集、分析部分学生在整式乘除运算方面的作业和试卷,并通过和中学一线数学教师的深入沟通,整理出学生在整式乘除运算方面的常见错误,然后,制作调查问卷,选取甘肃省张掖市育才中学七年级的部分学生为研究对象,以“问卷星”形式发放调查问卷,总共回收有效问卷 172 份。调查发现,学生在整式的乘除这一章中最容易出错的法则是多项式乘多项式,错误率高达 65.12%,而出现的常见错误主要有:不知道用那个公式、不会逆用公式、计算结果出错、公式法则记混、正负号出错、运算次序出错、去括号时出错、单项式乘多项式或多项式乘多项式时漏乘,其中,出错情况较多的为单项式乘多项式或多项式乘多项式时漏乘、正负号出错、去括号时出错和计算结果出错,出错率均超过 30%。

为了对整式乘除运算中出现的错误提出应对策略,本文将调查问卷收集到的结果进行分类整理,并基于罗增儒^[2]、戴再平^[3]等学者的研究,结合实际案例将整式乘除运算常见错误分为知识性错误、策略性错误和习惯态度方面的错误等三大类型。具体分类情况如表 1 所示。

表 1 错误类型具体情况分类表

错误类型	含义	错误表现
知识性错误	学生对某些有关知识理解不清,运用不当,因此未能正确陈述解题过程和结论导致失误。	1. 不能正确理解题意; 2. 概念和性质混淆不清; 3. 忽视公式、定理成立的条件; 4. 对题目涉及到的相关原有数学知识理解不到位; 5. 违反逻辑思维形式和规律。

策略性错误	可以指一种策略产生错误的导向,因而未能使问题得到解决;也可以指一种策略明显增加了解题过程的长度和难度,如果加上时间限制这个因素,问题也很可能因此而得不到解决。	1. 不能正确识别模式; 2. 缺乏整体观念; 3. 不善于从反向思考; 4. 不能恰当的转化问题。
习惯态度方面的错误	学生由于某种心理障碍或不良习惯导致错误产生。	1. 由于不良习惯导致的错误; 2. 看错或抄错题目、数据、步骤等; 3. 心理能力不足而造成的错误; 4. 缺乏正确的心理势态而造成的错误,主要是停留性错误以及忽视隐含条件。

1.1 知识性错误

戴再平在文^[2]中提到,逻辑性错误是指学生在解题中由于违反逻辑思维形式和规律而产生的错误,逻辑性错误本质上也是知识性错误,因此,本文在分析时将逻辑性错误包含在知识性错误中一起分析。整式乘除运算中的知识性错误主要有:公式法则记混、正负号出错和去括号时出错。

(1) 公式法则记混

例 1 计算 $(-a)^2(a^2)^2$

错解: a^8

正解: a^6

剖析: 将同底数幂乘法和幂的乘方混淆,错误地认为同底数幂相乘时,底数不变,指数相乘。

例 2 计算 $(-2a^2)^3$

错解: $-6a^6$

正解: $-8a^6$

剖析: 将乘方和乘法混淆,学生在计算这道题时,混淆了 -2×3 和 $(-2)^3$,属于乘方和乘法混淆。

例 3 计算 $(a-b)^3 \cdot (a-b)^4$

错解: $a^7 - b^7$

正解: $(a-b)^7$

剖析: 将多项式的次方与积的乘方混淆,这道题学生在得出结果后,误认为 $(a-b)^7$ 与 $(ab)^7$ 一样,可以将其展开写为 $a^7 - b^7$ 。

(2) 正负号出错

例 4 计算 $(-\frac{1}{3})^0 \div (\frac{1}{3})^{-2}$

错解: $-\frac{1}{9}$

正解: $\frac{1}{9}$

剖析: 奇、偶次幂和负次幂不理解造成的正负号出错,这道题主要考察整式乘除运算中的特殊次幂运算,其中负次幂的运算法则为 $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$,因此,

$(\frac{1}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$, 学生不理解奇、偶次幂和负次幂,误

将 $(\frac{1}{3})^{-2}$ 的结果计算为 -9 。

例 5 计算 $(x-y)^3 \cdot (x-y)^2 \cdot (y-x)$

错解: $(x-y)^6$

正解:

剖析: 换底换为同底数幂进行运算时造成正负号出错,

这道题学生在将 $(y-x)$ 换为与前面相同的底数时,忽略了负号而导致错误。

(3) 去括号时出错

例 6 计算 $(a + \frac{1}{2}b)(a - \frac{1}{2}b) - (3a - 2b)(3a + 2b)$

错解: 原式 $= a^2 - \frac{1}{4}b^2 - 9a^2 - 4b^2 = -8a^2 - \frac{17}{4}b^2$

正解: 原式 $= a^2 - \frac{1}{4}b^2 - 9a^2 + 4b^2 = -8a^2 - \frac{15}{4}b^2$

剖析: 这道题主要考查平方差公式,尽管学生正确使用了平方差公式,但在对两个平方差公式做差运算时忽略了 $9a^2 - 4b^2$ 整体有一个括号,属于去括号时出错。

1.2 策略性错误

策略性错误产生的主要原因有不会选择策略,缺乏解题思维,包括整体思维和逆向思维等,整式乘除运算中的策略性错误主要有:不知道用哪个公式和不会逆用公式。

(1) 不知道用哪个公式

例 7 计算 $(-2x+3)^2$

复杂策略: 原式 $= (-2x+3)(-2x+3)$

$= 4x^2 - 6x - 6x + 9$

$= 4x^2 - 12x + 9$

简便策略: 运用完全平方公式

剖析: 不会选择公式,这道题中学生选用了复杂的策略,运用多项式乘多项式的方法进行计算,增加了题目的长度和难度,没有想到更简便的算法。如果题目变得更加复杂,学

生很有可能会出错。

例 8 计算 $(a-b-3)(a-b+3)$

错解: $a^2 - b^2 - 9$

正解: 原式 $= (a-b)^2 - 9$

$= a^2 - 2ab + b^2 - 9$

剖析: 选择错误公式, 学生在解这道题时, 能想到用平方差公式, 但缺乏整体思维, 误以为有三项式时, 是将每一项平方再相减, 选用了错误的运算法则。

(2) 不会逆用公式

例 9 a^{3n+3} 可以写成 ()

A. a^{3n+3} B. $a^{3n} + a^3$ C. $a^3 \cdot a^{n+1}$ D. $a^{3n} \cdot a^3$

错解: A, B, C

正解: D

剖析: 分析学生作业的过程中发现绝大部分同学会选 B, 不会逆用同底数幂乘法公式, 缺乏逆向思维。

1.3 习惯态度方面的错误

整式乘除运算中习惯态度方面的错误主要有: 计算结果出错、运算次序出错和单项式乘多项式或多项式乘多项式时漏乘。

(1) 计算结果出错

例 10 计算 108×112

错解: 原式 $= (110-2)(110+2)$

$= 12100 - 4$

$= 1296$

正解: $= 12096$

剖析: 这道题主要考查运用平方差公式进行简便计算, 学生虽然知道了考查点, 但是由于粗心, 依然使得计算结果错误。

例 11 计算 16×2^{-4}

错解: 原式 $= 2^4 \times 2^{-4}$

$= 0$

正解: 1

剖析: 由于受到思维定势的影响, 使得计算结果出错, 学生误认为当指数相加为零时, 其结果也为零。

例 12 计算 $(3xy^2)^2 + (-4xy^3) \cdot (-xy)$

错解: $9x^2y^4 + 4x^2y^4$

正解: $13x^2y^4$

剖析: 学生由于粗心, 没有仔细检查将结果进一步化简,

是对上册学习过的整式加减内容的遗忘。

(2) 运算次序出错

例 13 计算 $(-1)^{2019} + (\pi - 3.14)^0 \times (\frac{1}{3})^{-1}$

错解: 原式 $= -1 + 1 \times 3$

$= 0$

正解: 2

剖析: 没有仔细审题, 学生在进行计算时习惯上认为要进行从左至右的运算。

(3) 单项式乘多项式或多项式乘多项式时漏乘

例 14 计算 $3a^2b(-4a^2b + 2ab^2 - 1)$

错解: $-12a^4b^2 + 6a^3b^3 - 1$

正解: $-12a^4b^2 + 6a^3b^3 - 3a^2b$

剖析: 学生在进行单项式乘多项式时漏乘, 忽略了将 $3a^2b$ 与 1 相乘。

例 15 计算 $(-a + 4b - 3)(2a + 5)$

错解: 原式 $= -2a^2 + 8ab - 6a - 5a - 15$

$= -2a^2 - 11a + 8ab - 15$

正解: 原式 $= -2a^2 - 5a + 8ab + 20b - 6a - 15$

$= -2a^2 - 11a + 20b + 8ab - 15$

剖析: 一般地, 多项式乘多项式时先用第一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项, 然后把所得的积相加, 这个法则基于乘法分配律, 确保了计算过程中的不重不漏。但有些学生是用第二个多项式的每一项乘第一个多项式的每一项, 由于运算习惯不同, 导致学生在进行多项式与多项式相乘时漏乘。

2. 整式乘除运算常见错误成因分析

行为主义心理学家认为, 人是在不断尝试错误中进行学习的。数学错误是不可避免的, 如何有效降低错误是每一位教师和学生都要关注的问题, 不能因为有了正确的思路和解法而忽略对错误的分析。因此, 本节针对上述整式乘除运算中出现的常见错误进行成因分析。

2.1 知识方面

教学要符合学生身心发展规律, 因此教材的编排一般呈螺旋式结构, 北师大版教材七年级下册第一章《整式的乘除》是建立在七年级上册学习了《有理数及其运算》和《整式及其加减》的基础上进行学习的, 如果学生对上册学习过的内容不够熟悉, 没有完全掌握运算律、运算法则, 那么在

学习整式乘除运算时将会遇到很多障碍。除了上册学习过的知识会给整式乘除运算带来影响外,其内容本身也会给学生带来学习困难,整式乘除运算的主要内容包括:同底数幂乘法、幂的乘方与积的乘方、同底数幂的除法、整式的乘法、平方差公式、完全平方公式和整式的除法,内容繁多,课时安排约 21 个课时,并且整式乘除运算作为第四学段“数与代数”领域重要的考点,每一个知识点都涉及到一个运算法则,而每一个运算法则还会涉及到其逆运算,导致法则公式的数量翻倍。这就要求思维活跃、反应能力强,能在理解的基础上记忆这些公式。

2.2 学生方面

学生的学习效率很大一部分会受到学习兴趣和习惯的影响。学习兴趣是人们获取知识,提升能力的重要情感基础,为人们将隐形的认知过程显性化提供了不竭动力,数学学习兴趣是在数学学习过程中逐渐产生的,具有强烈的感情色彩,良好的数学学习兴趣能使学生的学习活动变得积极主动,且富有成效^[4]。整式乘除运算属于代数领域的内容,大量数学符号堆砌的运算法则会让学生觉得枯燥乏味,没有求知欲望。另外,学习习惯对学生成绩的影响也十分重要,在整式乘除运算中,习惯态度方面的错误大多是受到学习习惯的影响,如计算结果出错、运算次序出错、单项式乘多项式或多项式乘多项式时漏乘,这些错误不是学生不理解题意造成的,更多的是由于学生的学习习惯不好而造成的。因此,想要在整式乘除运算上零失误,必须要求学生具备良好的学习习惯,如规范书写解题过程、注重结果的最简形式、养成自我检查的好习惯等。

2.3 教师方面

教师作为学生学习的引导者,对学生的学习起到直接的影响作用。在整式乘除运算中,学生产生错误的原因,来自教师方面的主要有:

(1) 基础知识讲解不透彻。教师可能在讲解整式乘除的基本概念、公式和运算法则时不够清晰或深入,导致学生对幂的乘方、积的乘方等概念混淆不清。对于一些重要的公式,如平方差公式、完全平方公式等,如果教师仅仅是让学生记住其公式形式,没有深入推导过程,学生就很难灵活运用这些公式进行解题。

(2) 教学方法不当。一是教学缺乏系统性,整式乘除运算中知识点繁多且相互关联,如果教师没有按照知识的内

在逻辑进行系统性的讲解和梳理,将导致学生知识脉络混乱。二是忽视逆运算教学,部分教师可能过于重视正向运算的教学,而忽视逆向运算的教学,导致学生在解题过程中遇到逆运算情况时无所适从,不能运用逆向思维来解题。三是缺乏针对性练习,如果教师设计的练习题目过于简单或重复,就无法有效提升学生的运算能力。

(3) 忽视对学生学习习惯的培养。良好的解题习惯是减少错误的重要保障,但部分教师可能忽视了对学生解题习惯的培养,如仔细审题、规范书写、及时检查等,导致学生在解题过程中频繁出错。

3. 整式乘除运算常见错误的应对策略

3.1 强化基础知识教学,培养学生的运算能力

强化基础知识的学习是教学的根本,是解决知识性错误的关键之处。整式的乘除是代数领域重要的一部分,为了确保学生在代数学习中打下坚实的基础,教师必须深入讲解整式乘除运算的法则和公式,重视知识的形成过程,带领学生亲历知识发生、发展过程,鼓励学生自主发现在运算中容易混淆的知识点,通过对类似知识的对比与分析,提炼出知识的本质与相应的运算方法。学生因亲历知识的形成过程而理清知识的内涵与本质将大幅降低因知识混淆不清而导致的运算错误^[5]。另外,公式法则的系统化整理也是关键,为了帮助学生更好地掌握和应用整式乘除运算中涉及的众多公式和法则,教师可以引导学生通过思维导图的形式进行公式和法则的系统化整理,包括将公式和法则进行分类、归纳和总结。最后,在掌握了基本公式和法则的基础上,设计有针对性的练习来帮助学生巩固知识,以此来提高学生的运算能力。

3.2 选择合适的问题解决策略,培养学生的运算能力

波利亚^[6]将解题步骤分为理解题目、拟定方案、执行方案、回顾等。其中在拟定方案阶段,要求学生必须了解题目之间的相关性和未知量与数据之间的关系以得到解题的思路。如果学生拟定的方案不合适,那么将会导致学生在解题过程中出现策略性错误。针对整式乘除运算中学生可能出现的策略性错误,如不知道用哪个公式和不会逆用公式等,教师需要引导学生进行有效的自我监控,即在解题过程中不断反思和调整自己的思路和方法,确保解题方法的正确性和高效性。其次,为了能选择合适的解题策略,提倡合作学习是一种行之有效的方法。通过小组讨论、互助学习等合作学

习方式,让学生分享各自的解题策略和经验,从而在交流中互相启发,共同提高。这种学习方式不仅可以拓宽学生的解题思路,还可以提高学生的运算能力。

3.3 养成良好习惯,培养学生的运算能力

首先,良好的审题习惯是正确运算的基础,当学生面对整式乘除运算题目时,必须认真研读题目内容,精准识别题目考查的知识点。其次,规范的书写习惯在整式乘除运算中不可或缺,规范的书写一方面能够帮助学生在运算时维持清晰、连贯的思路,另一方面也为后续的检查纠错提供了便利,使得错误能够被及时发现与修正。再次,检查的习惯是确保运算准确的关键一环,学生在计算完一道题后,应当仔细回溯整个运算过程,检查每一步运算是否遵循其运算法则。最后,总结与反思的习惯对于提升学生运算能力有着重要意义,每次完成一定数量的整式乘除运算练习后,学生应深入总结在运算过程中容易出现的错误类型以及错误原因,并通过反复的强化训练,不断弥补知识漏洞,从而实现运算能力的稳步提升。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 戴再平.数学习题理论[M].上海:上海教育出版社,1991.

[3] 罗增儒.数学解题学引论(第二版)[M].陕西:陕西师范大学出版社,2001.

[4] 李晓娜,张颖.初中生数学学习兴趣、学习动机的现状及关系研究[J].中学课程资源,2023,19(02):70-73+64.

[5] 朱薇.初中数学运算错误成因分析及应对措施的研究[J].中学数学,2021,(14):82-83.

[6] G·波利亚等.怎样解题:数学思维的新方法[M].上海科技教育出版社,2011.

作者简介:

刘倩倩(2000—),女,汉族,甘肃临夏人,在读硕士研究生,研究方向为学科教学(数学)。

刘慧敏(2000—),女,汉族,山东菏泽人,在读硕士研究生,研究方向为学科教学(数学)。

通讯作者:唐玉玲(1980—),女,甘肃民勤人,副教授,硕士生导师,主要从事数学教育和概率统计方面的研究工作。

基金项目:

本文受河西学院第十四批大学生科技创新项目《七年级学生整式乘除运算错因分析及对策研究》;项目编号:206;

国家自然科学基金资助项目《量子 Fermion 系统的 Markov 演化模型及退相干》;项目编号:12161050。