

数学化生活问题，提升建模能力

——以遗爱湖公园美食节“套圈游戏”为例

黄文杰 杨启金 晶

(黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈 438000)

摘要: 本次研究以遗爱湖公园美食节“套圈游戏”为例, 针对套圈投掷过程建立了相应的数学模型, 分析得到套圈能够套住目标物体的理论条件, 确定了套圈的投射角角度、出手初速度及入射角之间的关系式, 提出了提高套圈命中率建议。此次研究将实际生活中的问题数学化, 帮助学生提升数学建模的能力。

关键词: 套圈游戏; 投射角; 出手速度

《义务教育数学课程标准》(2022版)强调, 数学建模是通过现实问题进行数学抽象, 用数学的眼光来观察实际生活问题, 用数学语言和符号来表达问题, 用数学方法构建模型用以解决实际生活问题的过程。数学建模能力是数学学科核心素养之一, 也是初中数学课程的四大主题之一, 充分展现了数学建模思想在初中数学教育中的重要地位。《课标(2022版)》明确指出, 教师在数学教学过程中应注重培养学生在生活情境中发现、提出问题, 分析问题、建立和改进模型、计算运算、解决实际问题的能力。因此, 数学建模是将数学知识运用到实际生活的一种表现方式, 是发展学生的创新意识和应用意识, 逐步培养学生的核心素养有效形式。

一、问题提出

“套圈”作为一种街头游戏, 深受人们的喜爱, 如何提高套圈游戏中的套圈命中率是得消费者思考。本次研究以遗爱湖公园美食节“套圈游戏”为例, 为提高套圈命中率, 建立相应的模型分析, 希望能提升中学生对数学建模的兴趣。

套圈规则如下: 圈必须套住目标物体的四个角且完全接触地毯才算成功, 压边压角不算, 后方凳子上的目标物体需要套圈挂上即可。

二、套圈的运动过程分析

套圈游戏投掷套圈是一种定点投掷的运动, 只有精准地框住目标物体才能带走该物体。因此在投掷的过程中需要将空间、地面与时间、速度有机结合起来才能提高投掷套圈的命中率。在投掷过程中, 套圈的命中轨迹受到多种因素的影响。

(一) 投掷角度: 投掷角度是决定套圈投掷轨迹的重要因素之一。一般来讲, 投掷动作可看作是平抛运动。理论上任何投掷角度都可能套中目标, 但实际投掷过程中, 玩家通常会有一定的投掷角度, 来确保套圈既能飞行一定距离, 又在目标物体上方。

(二) 投掷初速度: 套圈投掷初速度直接决定飞行距离, 目标物的远近决定投掷初速度的大小。在投掷套圈过程中, 消费者需要灵活控制自己的力度, 以使得套圈的初速度能适应不同的投掷距离。

(三) 套圈的旋转: 投掷过程中, 套圈的旋转影响飞行的稳定性与碰撞时的反作用力。稳定旋转的套圈空中的飞行轨迹更稳定, 且在碰撞后产生更柔和的反弹, 从而增加命中率。控制好套圈的旋转是提高套圈命中率的重要手段。

三、模型假设与模型建立

套圈的过程可分为两个部分: 一是从出手到即将套住目标物的过程, 无需考虑套圈的形状与旋转的情况, 将其抽象为一个以内部大小为直径的圆, 此时套需要考虑套圈内壁直径和物体大小形状(实物图如图4.1)。

为简化目标物体的形状, 我们选取目标物体上部分, 以其的投影面积里的最长线段为直径画圆(直径为 r_1), 现随机地向地

面掷半径为 r_2 ($r_2 \geq r_1$)的圆(如图4.2所示), 套圈完全落在上图所在的圈内才有机会套中目标物体。

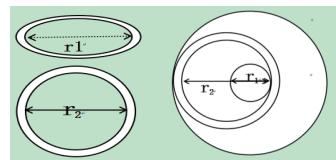


图 4.1

图 4.2

二是套圈从即将靠近目标物命中的过程, 此时要考虑套圈的实际形状及目标物大小的限制。当套圈圆心刚好与目标物的几何中心重合时, 套圈将不擦碰目标物边缘顺利套住, 即大概率可以套中物体。

根据所学物理数学知识, 假设不计空气阻力的情况下, 只考虑套圈重力, 假设套圈时出手后无横向偏角, 则套圈只在投掷人出手点、套圈中心、目标物几何中心所确定的平面内作平抛运动(如图4.3所示)。

如图所示可知, 圈在落地的瞬间, 存在一个速度, 将这个速度, 在水平和垂直方向分解, 可以得到水平方向速度 X , 垂直方向速度 Y 。抛出的越高, Y 的速度越快, 套圈飞行距离与速度 X 成正比。仔细观察即可发现, 套圈的直径并不比物体大很多, 要想套住目标物体, 抛出速度 X 必须控制好, 刚好需要物体进入圈中, 即不碰到圈的前段, 又要低于圈的后端(如图4.4所示)。

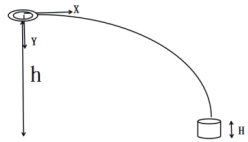


图 4.3

图 4.4

这对投掷人抛圈的速度是有一定要求的。竖直方向 Y 速度使得套圈在水平方向快速下落, 只给套圈水平方向很小的机会让套圈刚好进入圈中, 因此, 应该尽量减小 X 方向的速度, 以达到让套圈飞得慢一点的目的, 让套圈能够以 Y 的速度圈住目标物。因此, 在抛圈的时, 我们需要尽量给予一定的初始角度, 则套圈的运动轨迹我们可以粗略拟定为抛物线, 而不是以上的平抛运动(如图4.5)。

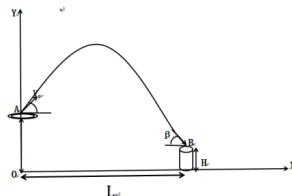


图 4.5

投掷人距离目标物 L 米, 圈出手时距离地面 h 米。目标物体高度为 H 米 (一般情况下 $h > H$), 套圈出手时的初速度为 V_0 , 以投射角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 作斜上抛运动, 套住目标物体的人射角为 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$)

在此情况下, 以投掷人所在地面上的点 O 作为坐标原点, 建立平面直角坐标系 (如图 4.5 所示), 则套圈人出手的位置 $A(0, h)$, 目标物几何中心 $B(L, H)$ 。

四、模型求解

(一) 投射角

套圈的运动轨迹可看作一条抛物线, 不妨设为 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 则, 有 $\begin{cases} f(0) = c = h \\ f(L) = aL^2 + bL + c = H \\ f'(0) = b = \tan \alpha \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} a = \frac{H-h-L\tan\alpha}{L^2} \\ b = \tan\alpha \\ c = h \end{cases} \text{ 所以对应的函数为 } f(x) = \frac{H-h-L\tan\alpha}{L^2}x^2 + \tan\alpha x + h$$

要使套圈顺利套住目标物体, 则必须满足 $L > \frac{H-h-L\tan\alpha}{2L^2}$ 解得 $\tan\alpha > \frac{2\cdot(H-h)}{L}$, 得

$\alpha > \tan^{-1} \frac{2\cdot(H-h)}{L}$, 即可得到, 当投掷人离目标物体的距离 L

不变的情况下, 投掷套圈时套圈出手高度 h 越大, 套圈套住目标物体所需的投射角 α 就越小。

(二) 出手初速度与投射角的关系

假设套圈出手时的初速度为 V_0 , 重力加速度为 g , 套圈时间为 t 套圈顺利套住目标物必须满足如下条件: $\begin{cases} L = V_0 t \cos \alpha \\ H-h = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$, 消去时间 t , 可得

$V_0^2 = \frac{gL^2}{2(L\tan\alpha - H + h)\cos^2\alpha}$ 将上述公式转化为关于 $\tan\alpha$ 的一元二次方程, $gL^2\tan^2\alpha - 2LV_0^2\tan\alpha + gL^2 + 2V_0^2(H-h) = 0$, 要想这个方程有实数根, 则 $\Delta \geq 0$, 可求得套圈出手时的

最小初速度, $V_{0\min} = \sqrt{g[H-h + \sqrt{L^2 + (H-h)^2}]}$, 解得

$$\tan\alpha = \frac{H-h + \sqrt{L^2 + (H-h)^2}}{L}, \text{ 求得 } \alpha = \tan^{-1} \frac{H-h + \sqrt{L^2 + (H-h)^2}}{L}.$$

也就是说, 在套圈运动过程中, 出手高度 h 越高, 套圈出手时所需的最小初速度就越小, 因此, 当投掷距离 L 及出手高度 h 保持不变的情况下, 投掷人越高, 越容易达到所要求的出手高度 h , 在套圈游戏中自然是越有优势。

(三) 投射角与入射角的关系

在套圈第二过程中, 套圈已不能看成质点。在套圈套住目标物体的瞬间, 其运动轨迹可近似看成是匀速直线运动。对于斜飞过来的套圈。其入射截面应该是目标物体在垂直于套圈入射速度方向上的投影按照遗爱湖清风广场此次套圈的规模, 以目标物上部表面为圆心, 该平面最大长度为直径的圆的直径约为 $2R = 8-15\text{cm}$, 该游戏所用套圈内壁直径为 $2r = 15\text{cm}$ 。故套圈的入射角 $\beta > 42.14$ 。根据导数的几何意义, 由函数①可得

$$f'(L) = \frac{2(H-h-L\tan\alpha)}{L} + \tan\alpha = \tan\beta. \text{ 解得套圈顺利套中物体时, 投射角 } \alpha \text{ 与入射角 } \beta \text{ 之间的关系为 } \tan\alpha \tan\beta = \frac{2(H-h)}{L}. \text{ 因此, 我们需要保证让套圈在飞行到目标上方时的前边缘高于后边缘。}$$

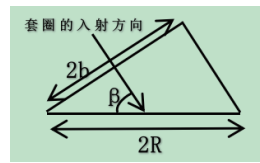


图 5.1



图 5.2

五、小结

(一) 选择合适的目标物体

在参与套圈活动过程中, 距离套圈起点线的前排目标物体相对较小, 其竖直方向的投影面积与套圈内壁直径相比小上许多。根据游戏规则, 如若想提高命中率, 避免空手而归, 可适当选取前方物品作为目标。距离起点线较远的目标物相对个体较大, 其竖直方向投影面积大于套圈内壁投影面积, 后方物体需要挂上套圈即为命中。根据物理学规律, 投掷距离越远需要的投掷初速度越大, 套圈所具有的动能越大, 越容易碰撞到目标物体而弹开套圈。即套中目标物的要诀在于准确的契合时间窗口, 那物体的选择就很重要了, 因为套圈宽度比上物体顶端宽度数值越大, 时间窗口越长, 套中的可能性就越大。因此, 消费者应该尽量选择上方投影面积小 (形状细、瘦、高) 的物体。

(二) 调整投射角度

在套圈游戏中, 投掷者容易采取平抛的方式投掷套圈。尽管理论上每一种投掷角度都有可能套中目标物体, 但在实际投掷过程中, 为了增加套中目标物体的可能性, 建议投掷者给予一定的投掷角度。根据建模结果推算, 一定角度范围内的投掷动作, 不仅可以确保套圈能够拥有一定的飞行距离, 而且可以让套圈有更大的空间在目标物体上方完成套取动作。套圈飞行过程中, 绝对不能让物体磕碰到圈的前边缘, 且物体的高度还要在后边缘飞过之前, 高于后边缘, 以达到套住的目的。套圈错误的飞行姿态 (前边缘低于后边缘, 前边缘撞到物体) 几乎是不能套住目标物体的。因此, 争取的提高命中率的方法, 是让前边缘高于后边缘, 这样就能达到这样的目的。

(三) 控制套圈旋转抛出

对于一般消费者而言, 离套圈起点线的目标物体更具有吸引力, 其一是因为摆放较远的物品造型别致, 符合消费者审美; 其二, 离抛投位置更远的物体经济价值更高。根据物理学规律, 投掷距离越远需要的投掷初速度越大, 套圈所具有的动能越大, 越容易碰撞到目标物体而弹开套圈, 值得思考的是如何减少碰到目标物后弹开套圈的概率。套圈投掷者应当采用控制套圈旋转的方式 (即将套圈抛着扔, 让套圈仰着飞) 旋转飞行的方式可以让套圈稳定的飞行姿态另一方面, 避免让套圈与目标物体之间产生强烈的碰撞, 不至于让套圈翻滚弹开而降低命中率。

数学知识源于生活, 用于生活, 在套圈游戏过程中, 游戏参与者应当积极思考提高命中率的方式, 应当积极将数学知识运用于现实世界中, 要有意识地将生活材料数学化, 结合自身实际和具体的游戏内容, 在理解数学的同时在思维能力、应用意识、创新意识、情感态度与价值观等多方面得到进步和发展。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准 (2022 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社.
- [2] 袁东升. 数学化生活问题, 提升数学建模能力——篮球定点投篮的数学建模问题研究 [J]. 中学教学研究 (华南师范大学版), 2022 (16): 11-13.