教学教法研究 4 卷 1 期
ISSN:2810-9651

基于双元变换的几类高次有理分式积分问题的计算及应用

欧阳瑞琦 [1]　刘奇龙 [1]　欧卫华 [2]*
1. 贵州师范大学数学科学学院　贵州贵阳　500025
2. 贵州师范大学大数据与计算机科学学院　贵州贵阳　500025

摘　要：双元变换在高次有理分式积分计算中的应用是在微积分和复分析领域中的一个重要研究方向。这类问题涉及到复杂的积分技巧和变换方法，尤其是当有理分式的次数较高时，其求解过程变得尤为复杂。本文首先总结了双元变换的常用方法和技巧以及双元变换在高次有理分式积分中的应用步骤。针对几类高次有理分式积分，利用双元变换的方法，结合组合计算方法和高次有理分式化成部分有理真分式的理论，给出了几类高次有理分式积分问题的计算方法 . 并利用所得到的结论，计算了几类积分问题。

关键词：柯西分布；双元变换；有理分式；反常积分

1.　引言

有理分式积分是微积分中的一个经典问题，它涉及到对具有有理函数形式的被积函数进行积分。当有理函数的次数较高时，传统的积分方法可能不再适用 , 因此 , 需要借助更复杂的技巧和方法 [1–3]。双元变换是一种重要的积分方法，它通过将原变量替换为新的变量组合，从而简化积分过程。在有理分式积分中，双元变换可以有效地降低被积函数的次数 , 使问题变得更容易解决 [1]。

双元变换在有理分式积分中的应用是国内学者的一个重点研究方向。例如 , 朱锦涵 , 彭丽 [4] 等将双元变换应用于高次有理分式反常积分中 , 并得到了一些结果。随着研究的深入，国内学者也开始尝试将双元变换应用于其他学科领域，如物理学、工程学等。这种跨学科的合作与应用不仅拓展了双元变换的应用范围，也促进了不同学科之间的交流与融合 [2]。本文主要研究双元变换在高次有理分式积分问题的计算及应用。

2. 双元变换在高次有理分式积分计算中应用

2.1 在 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}},(n \ge 2)$ 中的应用

柯西分布也称为柯西 – 洛伦兹分布 [5]，是描述共振行为的连续分布，它还描述了以随机角度倾斜的线段切割轴的水平距离 X 的分布。标准的柯西分布的概率密度函数为：

$$X:\ f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad x\in ¡ .$$

根据连续型随机变量函数的理论，计算可得随机变量 $Y=\sqrt{X}$ 的概率密度函数为

$$Y \sim f_Y(y)=\frac{4y}{\pi(1+y^4)},\quad y\in ¡^{+}.$$

若要对服从柯西分布的总体进行参数估计，最重要的点估计就是计算其各阶原点矩，而随机变量 Y 的 k 阶原点矩为

$$E(Y^k)=\int_0^{+\infty} y^k f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y^{k+1}}{1+y^4}\mathrm{d}y,\quad (k=1,2,3,\ldots). \tag{3.1}$$

如果 $k=1,$ 则 $E(Y)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y$ 。对于 k 在其他情形下的原点矩，可以通过变换将 (3.1) 式化简为如下两类积分问题的计算 [3]。

类型一　$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4},\qquad I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}.$

类型二　$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n},(n\in ¥^{+}).$

针对类型一所考虑的积分问题，本文利用组合计算方法来进行处理。

显然

$$I_1+I_2=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^{-2}}{x^{-2}+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}, \tag{3.2}$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{x^{-2}-1}{x^{-2}+x^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}. \tag{3.3}$$

为了计算 $I_1 + I_2, I_1 - I_2$，提出双元变换。

定理 3.1 作双元变换 T : $s = x + \frac{1}{x}, \quad t = x - \frac{1}{x}$，则变换 T 有如下性质：

(1) $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x - x^{-2}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}x + x^{-2}\mathrm{d}x;$

(2) $s^2 - t^2 = 4, \quad s\mathrm{d}s = t\mathrm{d}t;$

(3) $x = \frac{1}{2}(s+t), \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}s + \mathrm{d}t).$

证明：(1) 对双元变换 T 的两边分别求微分，即可得

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x - x^{-2}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}x + x^{-2}\mathrm{d}x.$$

(2) 由双元变换 T 的定义，可得

$$s^2 - t^2 = (x+\frac{1}{x})^2 - (x-\frac{1}{x})^2 = 4, \tag{3.4}$$

对 (3.4) 式两边求微分，可得

$$s\mathrm{d}s = t\mathrm{d}t.$$

(3) 由双元变换 T 的定义，立即可得

$$s + t = 2x,$$

从而得到

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}s + \mathrm{d}t).$$ 证毕。

由定理 1，不难计算 (3.2) 和 (3.3) 得

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C_1, \tag{3.5}$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\mathrm{d}s}{2-s^2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}\right| + C_2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C_2. \tag{3.6}$$

由方程 (3.5),(3.6) 即可解得

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C, \tag{3.7}$$

ISSN:2810-9651

$$I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C. \quad (3.8)$$

将类型一的两类积分进行推广，进而考虑如下的两类积分。

$$J_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^6},\quad J_2=\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{1+x^6}.$$

依类型一，联合双元变换 T，作组合计算法。利用因式分解可得

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1), \quad (3.9)$$

从而

$$J_1+J_2=\int\frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x=\int\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x+\int\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{1+x^6}=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C_1. \quad (3.10)$$

其中第三个等式使用了分解式 (3.9)。另一方面，由定理 1 双元变换 T 可得

$$J_2-J_1=\int\frac{x^4-1}{1+x^6}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}-1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}s}{s^2-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{s-\sqrt{3}}{s+\sqrt{3}}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C_2. \quad (3.11)$$

由 (3.10)，(3.11) 两式可解得

$$J_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C,$$

$$J_2=\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{1+x^6}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C.$$

2.2. 在 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n},(n\in \text{¥}^{+})$ 中的应用

此类型的积分问题，基本思路依然是考虑将其分解成部分分式之和。考虑到分母的因式分解与 n 的属性有关，因此可以分奇偶性来进行分析 [4]。

首先考虑偶幂的情形，令

$$x^{2n}+1=0, \quad (3.12)$$

则可得其 $2n$ 个复根

$$x_k = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2k-1}{2n}\pi} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\ldots,2n. \tag{3.13}$$

容易验证，方程 (12) 的复根 x_k 具有以下性质。

性质 3.1 $|x_k|=1,\quad x_k^{2n}=-1,\quad k=1,2,\ldots,2n.$

性质 3.2 $x_k\overline{x}_k=1,\quad x_k+\overline{x}_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\ldots,2n.$

利用有理分式的分解原理，设

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-x_k},$$

其中 $A_k\ (k=1,2,\ldots,2n)$ 是部分分式的待定系数，则可得

$\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k\left(1+x^{2n}\right)}{x-x_k}=1.$ (3.14) 在 (14) 式两边取极限 $x\to x_i\ (i=1,2,\ldots,2n)$，联合洛必达法则和性质 1 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k\left(1+x^{2n}\right)}{x-x_k}&=\lim_{x\to x_i}\frac{A_i\left(1+x^{2n}\right)}{x-x_i}=2nA_ix_i^{2n-1}\\&=\frac{2nA_ix_i^{2n}}{x_i}=-\frac{2nA_i}{x_i}=1.\end{aligned} \tag{3.15}$$

从而由 (3.15) 式可解得待定系数 A_i，其值为

$$A_i=-\frac{x_i}{2n},\quad i=1,2,\ldots,2n.$$

于是根据复数根的共轭性，利用性质 2 被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ 可以分解为

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-x_k}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{x_k}{x-x_k}==\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi+\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left|x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right|+C.$$

其中 C 为任意常数。

其次，考虑奇次幂的情形：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n+1}},\quad (n\in¥^+).$$

显然，$x^{2n+1}+1=0$ 有一实根 $x_0=-1$; 另外有 $2n$ 个共轭的复根 $x_1,x_2,\ldots,x_{2n}$，且相互共轭，其中

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi,\quad k=1,2,\ldots,2n.$$

类似偶次幂情形可得

$$\frac{1}{1+x^{2n+1}}=\frac{A_0}{x+1}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-x_k}=\frac{1}{(2n+1)(x+1)}+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}.$$ 从而可知

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n+1}}=\frac{1}{2n+1}\ln|x+1|+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\ln|x+1|}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi\cdot\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi}$$

$$-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi\cdot\ln\left|x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1\right|+C.$$

综合即得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\begin{array}{l}\sin\dfrac{2k-1}{2m}\pi\cdot\arctan\dfrac{x-\cos\frac{2k-1}{2m}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2m}\pi}\\ -\dfrac{1}{2m}\sum\limits_{k=1}^{m}\cos\dfrac{2k-1}{2m}\pi\cdot\ln\left|x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2m}\pi+1\right|+C,\end{array} & n=2m\\ \dfrac{\ln|x+1|}{2m+1}+\dfrac{2}{2m+1}\sum\limits_{k=1}^{m}\sin\dfrac{2k-1}{2m+1}\pi\cdot\arctan\dfrac{x-\cos\frac{2k-1}{2m+1}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2m+1}\pi} & n=2m+1.\\ -\dfrac{1}{2m+1}\sum\limits_{k=1}^{m}\cos\dfrac{2k-1}{2m+1}\pi\cdot\ln\left|x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2m+1}\pi+1\right|+C, & \end{cases}\tag{3.16}$$

ISSN:2810-9651

事实上，积分 I_1, J_1 分别是公式 (3.16) 中 $n = 4$ 和 $n = 6$ 的特殊情形。

2.3. 应用

利用计算出来的积分公式结合无穷积分的 Newton–Leibnitz 公式，可以进行广泛的应用。

问题 1 若随机变量 $X \sim C(0,+\infty)$，即 X 服从 $[0,+\infty)$ 上的柯西分布，连续型随机变量 $Y = \sqrt{X}$，试计算 Y 的一阶原点矩。

显然，由公式 (1) 可知，Y 的一阶原点矩为

$$E(Y) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y ,$$

利用 (7) 式可得

$$E(Y) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y = \sqrt{2}.$$

问题 2 证明：对 $n \in ¥^+$ 成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{2n}. \qquad (3.17)$$

证明：任取 $A > 0,$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \lim_{A\to\infty} 2\int_0^{A} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}. \qquad (3.18)$$

从而 (3.18) 式恰是公式 (3.16) 式中 n 为偶数的情形。因此，由公式 (3.16) 结合 Newton– Leibnitz 公式可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi. \quad (3.19)$$

另外一方面，由于

$$2\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = 2\sin\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\mathrm{L}\ +\sin\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$
$$= 1-\cos\pi = 2,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \csc\frac{\pi}{2n}.$$

综合即得 (3.17) 式成立。

结束语：本文利用双元变换的方法，针对 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}},(n \geq 2)$ 和 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{n}},(n \in ¥^+)$ 两类积分的求解问题，总结出了有效的变换技巧和求解策略。这些策略和技巧为解决实际问题提供了有力的理论支持。

尽管双元变换方法在高次有理分式积分问题中取得了一定的成果，但仍存在一些问题和挑战。首先，双元变换方法的适用范围有待进一步扩大。目前，该方法在处理某些特定形式的高次有理分式时效果较好，但对于更一般的形式，其应用效果仍需进一步验证。其次，双元变换方法的计算复杂度较高，需要进一步优化算法以提高计算效率。最后，如何将双元

变换方法与其他数学方法相结合，以更好地解决高次有理分式积分问题，也是未来研究的重要方向 [5]。

参考文献：

[1] 李天竹 . 一类三角函数有理分式定积分 [J]. 高等数学研究 ,2023,26(06):55-57.

[2] 董丽萍 , 曾晶 . 有理分式不定积分新解 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版),2022,38(01):18-23.

[3] 戴中林 . 一类有理分式积分的解法 [J]. 高等数学研究 ,2013,16(06):18-20.

[4] 朱锦涵 , 彭丽 , 周珏良等 . 基于双元变换的一类反常积分问题的计算 [J]. 高师理科学刊 ,2024,44(01):18-21+35.

[5] 王炳章 . 柯西分布的参数估计 [J]. 数学的实践与认识 ,2021,51(01):258-264.

作者简介：

第一作者，欧阳瑞琦，女，2003.09，湖南华容县，本科，研究方向：数学教育。

通迅作者，欧卫华，男，1979.09，湖南衡东县，教授，博士生导师，研究方向：教育教学、人工智能。

基金项目：国家级大学生创新创业训练计划项目(202310663051)