教学教法研究 4 卷 1 期
ISSN:2810-9651

# 直纹面上直母线的若干性质研究

罗海华　王泽霆
华南师范大学数学科学学院　广东广州　510631

**摘　要：**本文研究了单叶双曲面和双曲抛物面上直母线的几个重要性质，并提供了严谨的实证证明。在单叶双曲面上，不同族的直母线必然共面，而相同族的直母线则一定不在同一平面上。此外，同一族内的任意三条直母线也不会与同一个平面平行。本研究不仅对这些已知性质进行了系统的证明，而且还探讨了单叶双曲面上直母线两种不同定义的等价性，通过逻辑推理和数学建模双重证明，验证了这两种定义在几何和数学上的一致性。

**关键词：**直纹面单叶双曲面 ; 双曲抛物面 ; 直母线

## 1　引言

在三维空间中 , 由一族符合满足一定条件的直线组成的曲面叫做直纹面 , 如单叶双曲面与双曲抛物面 , 它们是空间解析几何研究的一类重要对象 . 在这些曲面上的直母线具有丰富的几何性质 [1].

给定一个单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ , 我们知道它有两族不同的直母线 , 其方程分别为

$$l_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}\left(\lambda^2+\mu^2\neq 0\right)\tag{1.1}$$

与

$$l_{\lambda',\mu'}:\begin{cases}\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}\left(\lambda'^2+\mu'^2\neq 0\right)\tag{1.2}$$

对于这两族直母线 , 我们已知其具有如下性质 :

定理 1.1[1,2,3] 单叶双曲面的直母线具有如下性质 :

(1) 异族的两直母线必共面 ;

(2) 同族的两直母线必异面 ;

(3) 同族的任意三条直母线 ; 不平行于同一个平面的性质 .

给定一个双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ , 在其上也有两族不同的直母线 , 其方程分别为

$$l_{\lambda}:\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\lambda\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}\tag{1.3}$$

与

$$l_{\mu}:\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\mu\\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}\tag{1.4}$$

对于这两族直母线 , 我们已知其具有如下性质：

定理 1.2[1,2,3] 双曲抛物面上的直母线具有如下性质 :

(1) 异族的两直母线必相交 ;

(2) 同族的两条直母线必异面 .

通过翻阅参考文献 , 我们发现定理 1.1 与定理 1.2 均只有内容陈述而未给出证明 . 鉴于此 , 本文将给出定理 1.1 与定理 1.2 的证明过程 .

另外 , 对于单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ , 其两族直母线也可以定义为

$$\bar{l}_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right)\\ \mu\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right)\end{cases}\left(\lambda^2+\mu^2\neq 0\right)\tag{1.5}$$

与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}:\begin{cases}\lambda'\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\\ \mu'\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}\left(\lambda'^2+\mu'^2\neq 0\right)$ (1.6)

在本文，我们将证明单叶双曲面上直母线的这两种定义是等价的，结论如下：

定理 1.3 对于单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，给定曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，

(1) 如果直线 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 都经过点 $P$，则 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 是同一条直线；

(2) 如果直线 $l_{\lambda',\mu'}$ 与 $\bar{l}_{\lambda,\mu}$ 都经过点 $P$，则 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 是同一条直线 .

本文结构安排如下：我们在第 2 节给出定理 1.1 与定理 1.2 的证明，在第 3 节给出定理 1.3 的证明 . 在第 4 节，我们将给出单叶双曲面上直母线的其它一个性质，即单叶双曲面的任意一条直母线在 $xOy$ 平面上的射影必和腰椭圆相切 [2].

## 2 定理 1.1 与定理 1.2 的证明

我们首先给出一个判断两条直线是否共面的引理 .

引理 2.1[1,2,3]: 直线 $l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 与 $l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1&D_1\\A_2&B_2&C_2&D_2\\A_3&B_3&C_3&D_3\\A_4&B_4&C_4&D_4\end{vmatrix}=0.$$

往下给出定理 1.1 的证明 .

定理 1.1(1) 的证明：单叶双曲面的直母线方程 (1.1) 与 (1.2) 可化简为

$$\begin{cases}\lambda bcx-\mu acy+\lambda abz+\mu abc=0\\ \mu bcx+\lambda acy-\mu abz+\lambda abc=0\end{cases}$$ 与

$$\begin{cases}\lambda' bcx+\mu' acy+\lambda' abz+\mu' abc=0\\ \mu' bcx-\lambda' acy-\mu' abz+\lambda' abc=0\end{cases}.$$

我们有行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda bc&-\mu ac&\lambda ab&\mu abc\\ \mu bc&\lambda ac&-\mu ab&\lambda abc\\ \lambda' bc&\mu' ac&\lambda' ab&\mu' abc\\ \mu' bc&-\lambda' ac&-\mu' ab&\lambda' abc\end{vmatrix}=(abc)^3\begin{vmatrix}\lambda&\mu&\lambda&\mu\\ \mu&\lambda&\mu&\lambda\\ \lambda'&\mu'&\lambda'&\mu'\\ \mu'&\lambda'&\mu'&\lambda'\end{vmatrix}=(abc)^3\begin{vmatrix}0&0&\lambda&\mu\\ \mu&\lambda&0&0\\ 0&\mu'&\lambda'&0\\ \mu'&0&0&\lambda'\end{vmatrix}$$

$$=(abc)^3(\lambda\begin{vmatrix}\mu&\lambda&0\\0&\mu'&0\\ \mu'&0&\lambda'\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\mu&\lambda&0\\0&\mu'&\lambda'\\ \mu'&0&0\end{vmatrix})=(abc)^3(\lambda'\lambda\mu\mu'-\lambda'\lambda\mu\mu')=0.$$

则由引理 2.1 可知直线 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $l_{\lambda',\mu'}$ 共面 .

定理 1.1(2) 的证明：只需证明其中一种情况，另一种情况类似 . 设有同族的两条直母线

$$l_{\lambda_1,\mu_1}:\begin{cases}\lambda_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases} 与\ l_{\lambda_2,\mu_2}:\begin{cases}\lambda_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu_2\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_2\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}.$$

则相应参数满足 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq 0$ . 上述两条直线方程即为

$$l_{\lambda_1,\mu_1}:\begin{cases}\lambda_1bcx-\mu_1acy+\lambda_1abz+\mu_1abc=0\\ \mu_1bcx+\lambda_1acy-\mu_1abz+\lambda_1abc=0\end{cases}$$ 与

$$l_{\lambda_2,\mu_2}:\begin{cases}\lambda_2bcx-\mu_2acy+\lambda_2abz+\mu_2abc=0\\ \mu_2bcx+\lambda_2acy-\mu_2abz+\lambda_2abc=0\end{cases}.$$

从而可得行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1bc&-\mu_1ac&\lambda_1ab&\mu_1abc\\ \mu_1bc&\lambda_1ac&-\mu_1ab&\lambda_1abc\\ \lambda_2bc&-\mu_2ac&\lambda_2ab&\mu_2abc\\ \mu_2bc&\lambda_2ac&-\mu_2ab&\lambda_2abc\end{vmatrix}=(abc)^3\begin{vmatrix}\lambda_1&-\mu_1&\lambda_1&\mu_1\\ \mu_1&\lambda_1&-\mu_1&\lambda_1\\ \lambda_2&-\mu_2&\lambda_2&\mu_2\\ \mu_2&\lambda_2&-\mu_2&\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$=(abc)^3\begin{vmatrix}0&0&\lambda_1&\mu_1\\ \mu_1&\lambda_1&0&0\\ 0&0&\lambda_2&\mu_2\\ \mu_2&\lambda_2&0&0\end{vmatrix}=(abc)^3\left(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\right)^2\neq 0.$$

则由引理 2.1 可知 $l_{\lambda_1,\mu_1}$ 与 $l_{\lambda_2,\mu_2}$ 异面 .

定理 1.1(3) 的证明： 只需证明其中一种情况，另一种情况类似 . 设有同族的三条直母线

$$l_{\lambda_1,\mu_1}:\begin{cases}\lambda_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases},\quad l_{\lambda_2,\mu_2}:\begin{cases}\lambda_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu_2\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda_2\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$ 与

ISSN:2810-9651

$$l_{\lambda_3,\mu_3}:\begin{cases}\lambda_3\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu_3\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu_3\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda_3\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases},$$

其参数满足 $\frac{\lambda_1}{\mu_1}\neq\frac{\lambda_2}{\mu_2}\neq\frac{\lambda_3}{\mu_3}$ . 三条直线各自的方向向量分别为

$\overrightarrow{v_1}=\left\{\mu_1^2-\lambda_1^2,\lambda_1\mu_1,\mu_1^2+\lambda_1^2\right\}$ ，$\overrightarrow{v_2}=\left\{\mu_2^2-\lambda_2^2,\lambda_2\mu_2,\mu_2^2+\lambda_2^2\right\}$ ，$\overrightarrow{v_3}=\left\{\mu_3^2-\lambda_3^2,\lambda_3\mu_3,\mu_3^2+\lambda_3^2\right\}$ .

则我们有判别式

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mu_1^2-\lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2+\lambda_1^2\\ \mu_2^2-\lambda_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \mu_2^2+\lambda_2^2\\ \mu_3^2-\lambda_3^2 & \lambda_3\mu_3 & \mu_3^2+\lambda_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1^2\\ \mu_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2^2\\ \mu_3^2 & \lambda_3\mu_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}$$

$$=\left(\mu_2\lambda_3-\mu_3\lambda_2\right)\left(\mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_1\right)\left(\mu_1\lambda_3-\mu_3\lambda_1\right)\neq 0 .$$

由此可知 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$ 异面，从而 $l_{\lambda_1,\mu_1}$ ，$l_{\lambda_2,\mu_2}$ 与 $l_{\lambda_3,\mu_3}$ 不平行于同一个平面 .

以下给出定理 1.2 的证明 .

定理 1.2 的证明：对于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ ，其直母线方程 (1.3) 与 (1.4) 可化为

$$l_\lambda\begin{cases}bx+ay-2\lambda ab=0\\ \lambda bx-\lambda ay-abz=0\end{cases}\text{与}\ l_\mu\begin{cases}\mu bx+\mu ay-abz=0\\ bx-ay-2\mu ab=0\end{cases}.$$

(1) $l_\lambda$ 与 $l_\mu$ 的方向向量分别为

$\overrightarrow{v_1}=\left\{-ab^2,a^2b,-2ab\lambda\right\}$ 与 $\overrightarrow{v_2}=\left\{-ab^2,-a^2b,-2ab\mu\right\}$ .

由于

$$\begin{vmatrix}b & a & 0 & -2\lambda ab\\ \lambda b & -\lambda a & -ab & 0\\ \mu b & \mu a & -ab & 0\\ b & -a & 0 & -2\mu ab\end{vmatrix}=2a^3b^3\left(-\lambda\mu+\lambda\mu\right)=0$$

，故由引理 2.1 可知直母线 $l_\lambda$ 和 $l_\mu$ 共面 . 又因为 $\overrightarrow{v_1}$ 与 $\overrightarrow{v_2}$ 不共线，所以 $l_\lambda$ 与 $l_\mu$ 不相互平行 . 由此可知 $l_\lambda$ 与 $l_\mu$ 必相交 .

(2) 只需证明其中一种情况，另一种情况类似 . 设有给定的同族两条直母线

$$l_\lambda\begin{cases}bx+ay-2\lambda ab=0\\ \lambda bx-\lambda ay-abz=0\end{cases}\text{和}\ l_{\lambda'}\begin{cases}bx+ay-2\lambda' ab=0\\ \lambda' bx-\lambda' ay-abz=0\end{cases}.$$

由于

$$\begin{vmatrix}b & a & 0 & -2\lambda ab\\ \lambda b & -\lambda a & -ab & 0\\ b & a & 0 & -2\lambda' ab\\ \lambda' b & -\lambda' a & -ab & 0\end{vmatrix}=2a^3b^3\left(\lambda-\lambda'\right)\lambda'-2a^3b^3\lambda\left(\lambda-\lambda'\right)$$

$$=-2a^3b^3\left(\lambda-\lambda'\right)^2\neq 0 ,$$

故由引理 2.1 可知 $l_\lambda$ 和 $l_{\lambda'}$ 直母线不共面 .

### 3. 定理 1.3 的证明

对于定理 1.3, 我们可以从实例出发 .

例如给定单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ ，其上的点 P $(1,0,0)$

可得 $l_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda(x+z)=\mu(1+y)\\ \mu(x-z)=\lambda(1-y)\end{cases}\left(\lambda^2+\mu^2\neq 0\right)$ 与

$l_{\lambda',\mu'}:\begin{cases}\lambda'(x+z)=\mu'(1-y)\\ \mu'(x-z)=\lambda'(1+y)\end{cases}\left(\lambda'^2+\mu'^2\neq 0\right)$ ,

则 $\lambda:\mu=1:1$ , $\lambda':\mu'=1:1$ ,

于是 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $l_{\lambda',\mu'}$ 的方位向量分别为 $\{0,1,1\}$ 和 $\{0,1,-1\}$ .

同时也有

$\bar{l}_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda(y+z)=\mu(1+x)\\ \mu(y-z)=\lambda(1-x)\end{cases}\left(\lambda^2+\mu^2\neq 0\right)$ 与

$\bar{l}_{\lambda',\mu'}:\begin{cases}\lambda'(y+z)=\mu'(1-x)\\ \mu'(y-z)=\lambda'(1+x)\end{cases}\left(\lambda'^2+\mu'^2\neq 0\right)$

则 $\lambda:\mu=1:0$ , $\lambda':\mu'=0:1$ ,

于是 $\bar{l}_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 的方位向量分别为 $\{0,1,-1\}$ 和

$\{0,1,1\}$.

可以发现，$l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 在经过同一点 P 时表示的为同一条直线 .

$l_{\lambda',\mu'}$ 与 $\bar{l}_{\lambda,\mu}$ 在经过同一点 P 时表示的为同一条直线 .

根据该实例，以下给出定理 1.3 的证明 .

定理 1.3(1) 的证明：直线 $l_{\lambda,\mu}$ 与直线 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 的方向向量分别为

$\vec{v}_1=\{a(\lambda^2-\mu^2),2b\lambda\mu,-c(\lambda^2+\mu^2)\}$ 与 $\vec{v}_2=\{2a\lambda'\mu',\ b(\mu'^2-\lambda'^2),\ c(\lambda'^2+\mu'^2)\}$.

由于 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 经过同一点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$，故可得

$$\lambda:\mu=\left(1-\frac{y_0}{b}\right):\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right) \text{或} \left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right):\left(1-\frac{y_0}{b}\right)$$

与 $\lambda':\mu'=\left(1+\frac{x_0}{a}\right):\left(\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)$ 或 $\left(\frac{y_0}{b}-\frac{z_0}{c}\right):\left(1-\frac{x_0}{a}\right)$.

不妨设 $\lambda=1-\frac{y_0}{b}$，$\mu=\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$（$1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0 时），

$\lambda=\frac{x_0}{a}$，$\mu=1$（$1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0 时）;

$\lambda'=1+\frac{x_0}{a}$，$\mu'=\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$（$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0 时），

$\lambda'=\frac{y_0}{b}$，$\mu'=1$（$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0 时）.

要证 $l_{\lambda,\mu}$ 与直线 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 为同一条直线，只需证明 $\vec{v}_1//\vec{v}_2$，

即证 $\frac{\lambda^2-\mu^2}{2\lambda'\mu'}=\frac{2\lambda\mu}{\mu'^2-\lambda'^2}=\frac{-(\lambda^2+\mu^2)}{\lambda'^2+\mu'^2}$.

由等式 $\frac{\lambda^2-\mu^2}{2\lambda'\mu'}=\frac{-(\lambda^2+\mu^2)}{\lambda'^2+\mu'^2}$ 和 $\frac{2\lambda\mu}{\mu'^2-\lambda'^2}=\frac{-(\lambda^2+\mu^2)}{\lambda'^2+\mu'^2}$ 可得

$$\begin{cases}(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2+\mu'^2)+2\lambda'\mu'(\lambda^2+\mu^2)=0 & (3.1)\\ (\lambda-\mu)^2\lambda'^2=(\lambda+\mu)^2\mu'^2 & (3.2)\end{cases}.$$

对此进行分类讨论 .

(1) $1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0，$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0 时 .

则 $\lambda=\frac{x_0}{a}$，$\mu=1$，$\lambda'=1+\frac{x_0}{a}$，$\mu'=1-\frac{x_0}{a}$.

将其代入（3.1）和（3.2）可得

$$2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)+2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)=0,$$

和 $\left(\frac{x_0}{a}-1\right)^2\left(\frac{x_0}{a}+1\right)^2=\left(\frac{x_0}{a}+1\right)^2\left(1-\frac{x_0}{a}\right)^2$，等式显然成立 .

(2) $1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0，$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0 时 .

则 $\lambda=1-\frac{y_0}{b}$，$\mu=-1-\frac{y_0}{b}$，$\lambda'=\frac{y_0}{b}$，$\mu'=1$.

将其代入（3.1）和（3.2）可得

$$-4\frac{y_0}{b}\left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)+2\left(\frac{y_0}{b}\right)\left(2\frac{y_0^2}{b^2}+2\right)=0,$$

和 $(2)^2\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=\left(-2\frac{y_0}{b}\right)^2$，等式显然成立 .

(3) $1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0，$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 同时为 0 时 .

显然无这种点 P，舍去 .

(4) $1-\frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0，$1+\frac{x_0}{a}$ 与 $\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}$ 不同时为 0 时 .

对其再进行详细分类讨论 .

(4.1) $\lambda-\mu=0$，

由于 $\lambda=1-\frac{y_0}{b}=\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=\mu\neq 0$，故由等式 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 可得

$$\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right).$$

即 $1+\frac{y_0}{b}=\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}$ 可得 $\mu^{'}=\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=\frac{x_0}{a}-1$，

同时 $\lambda-\mu=1-\frac{x_0}{a}-\left(\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)=1-\frac{x_0}{a}-\mu^{'}=0$，

则有 $1-\frac{x_0}{a}=\mu^{'}$，又由于 $\mu^{'}=\frac{x_0}{a}-1.$

所以 $\mu^{'}=0$，将其与 $\lambda-\mu=0$ 代入 (3.1) 和 (3.2) 可得方程左右两边均为 0, 等式显然成立

(4.2) $\lambda-\mu\neq 0$，
等式 (3.1) 可变型为

$$(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)^2(\lambda^{'2}+\mu^{'2})+2\lambda^{'}\mu^{'}(\lambda-\mu)(\lambda^2+\mu^2)=0.$$

则上述等式组成立等价于如等式组

$$\begin{cases}(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)\mu^{'2}+(\lambda-\mu)^2\lambda^{'}\mu^{'}=0 & (3.3)\\ (\lambda-\mu)^2\lambda^{'2}=(\lambda+\mu)^2\mu^{'2} & (3.4)\end{cases}.$$

成立 . 因此我们只需证明等式 (3.3) 与 (3.4) 成立 . 对此进行分类讨论 .

(4.2.1) $\mu^{'}=0$ 时 , 等式 (3.3) 显然成立 .

由于 $\mu^{'}=\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=0$，$\lambda-\mu=1-\frac{x_0}{a}-\left(\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)\neq 0$，故由等式

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 可得

$$\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\left(1+\frac{x_0}{a}\right)=\left(\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{y_0}{b}-\frac{z_0}{c}\right)=0.$$

由于 $1-\frac{x_0}{a}\neq\left(\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)=0$，所以 $\lambda^{'}=1-\frac{x_0}{a}=0$，又因为 $\mu^{'}=0$，所以等式 (3.4) 成立 .

(4.2.2) 当 $\mu^{'}\neq 0$ 时，等式 (3.3) 等价于 $(\lambda+\mu)\mu^{'}=-(\lambda-\mu)\lambda^{'}$ . 其等式两边的平方即为等式 (3.4). 将 $\lambda,\mu,\lambda^{'},\mu^{'}$ 的值代入并化简即得 $1-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=0$ . 从而即知等式 (3.3) 与 (3.4) 均成立 .

综上所述 , 直线 $l_{\lambda,\mu}$ 与 $\bar{l}_{\lambda',\mu'}$ 过同一点时表示的为同一条直线 .

同理可证明定理 1.3(2) 中两条直线 $l_{\lambda',\mu'}$ 与 $\bar{l}_{\lambda,\mu}$ 过同一点时也为同一条直线 . 证毕 .

**4. 其它性质**

定理 4.1 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上任意一条直母线在 $xOy$ 平面上的射影都和腰圆相切 .

证明：不妨设直母线的方程为 $l:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}$，

其方向向量为

$$\vec{v}=\left\{a(\lambda^2-\mu^2), \quad b\lambda\mu \quad -c(\lambda^2+\mu^2)\right\}.$$

设 $l$ 与 $xOy$ 面腰椭圆的交点为 $P(x_0,y_0,0)$，则对于直线 $l$ 有 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a}}=\frac{ab-ay_0}{bx_0}$ .

从而 $l$ 在 $xOy$ 面上的射影直线 $l^{'}$ 的斜率

$$k=\frac{2b\lambda\mu}{a(\lambda^2-\mu^2)}=\frac{2b}{a(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda})}=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}.$$

往下将计算放在平面 $xOy$ 上 , 则在平面 $xOy$ 上单叶双曲面的腰椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .

在平面 $xOy$ 上直线 $l^{'}$ 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ . 联立腰椭圆方程和 $l^{'}$ 方程得

ISSN:2810-9651

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & (4.1) \\ y-y_0=k\left(x-x_0\right) & (4.2) \end{cases},$$

将 (4.1) 代入 (4.2) 得方程

$$(b^2+\frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2})x^2-2(b^2x_0+\frac{b^4x_0^3}{a^2y_0^2})x+\frac{b^4x_0^4}{a^2y_0^2}+b^2x_0^2=0 \quad .$$

由于

$$\Delta=\left(2b^2x_0+2\frac{b^4x_0^3}{a^2y_0^2}\right)^2-4\left(b^2+\frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2}\right)\left(\frac{b^4x_0^4}{a^2y_0^2}+b^2x_0^2\right)$$
$$=4\frac{b^8x_0^6}{a^4y_0^4}+4b^4x_0^2+8\frac{b^6x_0^4}{a^2y_0^2}-4\frac{b^6x_0^4}{a^2y_0^2}-4\frac{b^8x_0^6}{a^4y_0^4}-4b^4x_0^2-4\frac{b^6x_0^4}{a^2y_0^2}$$
$$=0,$$

所以射影直线 $l'$ 与腰椭圆相切 , 由 $x_0$ 和 $y_0$ 的任意性可得任意直母线的射影直线都与腰椭圆相切 [3].

另外一族直母线射影与腰椭圆的相切情况的证明是类似的。

**参考文献 :**

[1] 尤承业 , 解析几何 [M], 第一版 , 北京：北京大学出版社 , 2004.

[2] 丘维声 , 解析几何 [M], 第二版 , 北京：北京大学出版社 , 1996.

[3] 吕林根 , 解析几何 [M], 第三版 , 北京：高等教育出版社 , 1987.

**作者简介：**

罗海华（2003-），男，汉，广东河源人，本科在读，从事数学方面研究。

王泽霆（2002-），男，汉，广东深圳人，本科在读，从事数学方面研究。