

任意轴角下准双曲面齿轮节锥参数的非迭代直接解析方法

陈磊¹ 黄景东¹ 黄炳² 戚峯煜² 肖科¹

1. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室 重庆 400044

2. 宁波中大力德智能传动股份有限公司 慈溪 315300

摘要:【目的】为简化准双曲面齿轮传统设计中复杂的两次迭代计算过程并揭示其节锥演化规律,研究其节锥几何关系,提出一种适用于任意轴交角的节锥参数直接计算方法。【方法】基于准双曲面齿轮的几何特性,建立包含两个未知变量的非线性方程组,据此提出节锥参数的直接求解方法。通过四组算例,应用该方法进行解析计算,并与传统迭代法结果进行对比。【结果】计算结果显示,直接计算方法所得节锥参数与传统迭代法结果高度吻合,验证了该方法的准确性。同时,该方法能够简洁地揭示准双曲面齿轮节锥的演化规律。【结论】研究表明,所提出的准双曲面节锥参数直接计算方法,有效简化了传统计算流程,具有较高的计算效率和准确性。

关键词: 准双曲面齿轮; 节锥几何关系; 非线性方程组; 齿轮参数计算方法

引言

准双曲面齿轮是一类用于传递相错轴之间运动的齿轮,被广泛运用到汽车与工程机械行业中。准双曲面齿轮的几何设计包括确定节锥几何参数、大轮几何尺寸参数和小轮几何尺寸参数。其中,确定节锥几何参数是关键。

目前,国内外对非正交准双曲面齿轮传动的研究尚在起步阶段。1946年,E.Wildhaber[1-2]提出了关于准双曲面齿轮的基本几何计算以及轮坯设计的流程,其准双曲面齿轮节面模型一直沿用至今。在此基础上,Litvin^[3]构造了三个方程来求解准双曲面齿轮的节锥,过这种方法,可以确定准双曲线节锥。这种几何设计方法已广泛应用于准双曲面齿轮设计中。吴训成根据准双曲面齿轮节锥的几何关系,建立了节锥参数的基本方程,包括7个节锥参数和4个方程组。基于这些方程,提出了一种新的几何设计方法。张波^[5]提出了一种包含两个参数的方程来计算轴交角为90°的准双曲面节锥参数的新方法,简化了计算过程。刘思远^[6]推导了基于单叶双曲面副瞬时轴线的空间节圆锥副设计参数几何关系,提出一种针对小交错角面铣准双曲面齿轮的几何设计方法。综上可知,目前关于非正交准双曲面齿轮依然处于探索阶段,缺乏系统性的几何设计方法。

本文基于准双曲面空间几何节锥特性,传动比要求和齿轮强度要求,推导了准双曲面齿轮空间几何关系,提出了一种无需迭代,以准双曲面大小轮节锥中两条边为参数,构

建相应方程组,给出任意8个已知条件,即可求得0~90°的准双曲面齿轮的其他节锥参数。

1 准双曲面齿轮几何关系

1.1 准双曲面齿轮的节锥

准双曲面齿轮副的瞬轴面是一对回转双曲面。然而,双曲面在实际设计与加工中较复杂,因此将双曲面近似为一对圆锥面作为其工作界面,这对圆锥就是准双曲面齿轮副的节锥。如图1所示, a_1 、 a_2 分别是小轮和大轮的轴线,它们之间的空间夹角就是轴交角 Σ ,他们之间的最短距离 E 就是准双曲面齿轮副的偏置距。 O_1 点称为小轮交叉点, O_2 点称为大轮交叉点。设 P 点是节点,它到两轴线的距离 r_1 、 r_2 是小轮和大轮的节圆半径,过 P 点可以作唯一的一条直线 K_1K_2 与 a_1 轴及 a_2 轴相交,过 P 点作与 K_1K_2 垂直的平面 T 为节平面,节平面与小轮轴线 a_1 相交于 O_1 ,与大轮轴线 a_2 相交于 O_2 ,将 PO_1 绕小轮轴线 a_1 旋转所形成的锥面就是小轮的节锥面,将 PO_2 绕大轮轴线 a_2 旋转所形成的锥面就是大轮的节锥面, $\varepsilon' = \angle O_2PO_1$ 称为准双曲面齿轮偏置角。 PO_1 与小轮轴线 a_1 之间的夹角 δ_1 称为小轮节锥角。 PO_2 与大轮轴线 a_2 之间的夹角 δ_2 称为大轮节锥角。 PO_1 和 PO_2 分别表示小轮节锥距和大轮节锥距。

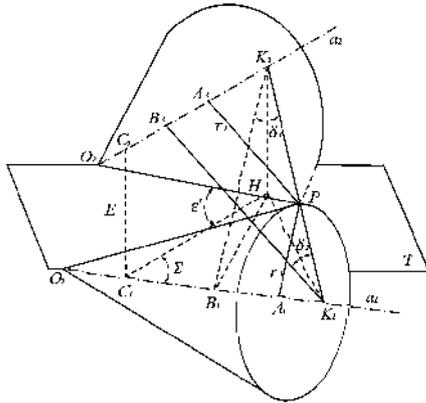


图1 准双曲面齿轮的节锥

1.2 准双曲面齿轮节锥几何关系

为了更清晰明了的表达准双曲面齿轮节锥的几何关系，将图1简化为图2的形式。

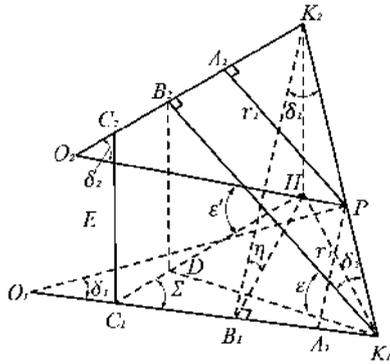


图2 准双曲面齿轮的节锥简化图

图中， η 为小轮辅助偏置距。 ϵ 为大轮辅助偏置角。

r_1 、 r_2 、 δ_1 、 δ_2 、 ϵ' 、 η 、 ϵ 等参数称为准双曲面齿轮的节锥基本参数。

在这些参数之间存在以下关系^[3]

$$\frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

$$E = \frac{\sin \epsilon' (r_1 \cos \delta_2 + r_2 \cos \delta_1)}{\sin \Sigma} \quad (2)$$

$$\cos \epsilon' = \tan \delta_1 \tan \delta_2 + \frac{\cos \Sigma}{\cos \delta_1 \cos \delta_2} \quad (3)$$

$$\epsilon' = \beta_1 - \beta_2 \quad (4)$$

由图2可推得以下几何关系

$$HB_1 = K_2 C_2 \sin(\Sigma) \quad (5)$$

$$DK_1 = K_1 C_1 \sin(\Sigma) \quad (6)$$

$$HK_1 = \sqrt{K_2 C_2^2 + K_1 C_1^2 - 2K_2 C_2 K_1 C_1 \cos(\Sigma)} \quad (7)$$

$$K_1 B_1 = \sqrt{HK_1^2 - HB_1^2} \quad (8)$$

$$K_1 K_2 = \sqrt{E^2 + HB_1^2 + K_1 B_1^2} \quad (9)$$

$$K_2 B_1 = \sqrt{E^2 + HB_1^2} \quad (10)$$

$$K_1 B_2 = \sqrt{E^2 + DK_1^2} \quad (11)$$

$$K_2 B_2 = \sqrt{HK_1^2 - DK_1^2} \quad (12)$$

由此，节锥参数 δ_1 、 δ_2 、 η 、 ϵ 可表示为

$$\delta_1 = \arctan \frac{K_1 B_1}{K_2 B_1} \quad (13)$$

$$\delta_1 = \arctan \frac{\sqrt{K_2 C_2^2 + K_1 C_1^2 - 2K_2 C_2 \cdot K_1 C_1 \cos(\Sigma) - (K_2 C_2 \sin(\Sigma))^2}}{\sqrt{E^2 + (K_2 C_2 \sin(\Sigma))^2}} \quad (14)$$

$$\delta_2 = \arctan \frac{K_2 B_2}{K_1 B_2} \quad (15)$$

$$\delta_2 = \arctan \frac{\sqrt{K_2 C_2^2 + K_1 C_1^2 - 2K_2 C_2 \cdot K_1 C_1 \cos(\Sigma) - (K_1 C_1 \sin(\Sigma))^2}}{\sqrt{E^2 + (K_1 C_1 \sin(\Sigma))^2}} \quad (16)$$

$$\eta = \frac{Ea}{HB_1} \quad (17)$$

$$\epsilon = \frac{Ea}{DK_1} \quad (18)$$

由式(3)与式(4)，可推得辅助偏置角 ϵ' 和大轮螺旋角 β_2 的表达式

$$\epsilon' = \arccos\left(\tan \delta_1 \tan \delta_2 + \frac{\cos \Sigma}{\cos \delta_1 \cos \delta_2}\right) \quad (19)$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \epsilon' \quad (20)$$

2 节锥参数的直接计算法

在计算准双曲面齿轮的节锥参数时，部分节锥参数根据设计要求已确定为已知量，其他未知节锥参数则通过几何关系进行求解。其中已知量一般包括：大轮大端节圆直径 d_2 ，大轮齿宽 b_2 ，小轮螺旋角 β_1 或者大轮螺旋角 β_2 ，偏置距 E ，大轮齿数 z_2 ，小轮齿数 z_1 ，轴交角 Σ 。目前常用的准双曲面齿轮的节锥参数求解方法是通过迭代的方式进行求解，其求解过程如图3所示，该方法需预先设定加工刀盘半径 r_{co} ，并将其作为迭代判断的重要依据，通过不断调整参数以满足几何关系，从而求得合理的节锥参数，然而，这种方法计算过程较为复杂。

为克服传统迭代方法的不足，本文建立了一种无需迭代的节锥参数直接计算方法。该方法不依赖于加工刀盘半径的预设，也无需进行复杂的迭代判断。通过以准双曲面齿轮节锥中的两条边为未知量，构建反映其几何关系的方程组并直接求解，可快速得到任意轴交角的准双曲面齿轮的节锥参

数。此外,该方法还具备良好的可扩展性与清晰的物理意义,可便捷的分析节锥参数的演化规律。

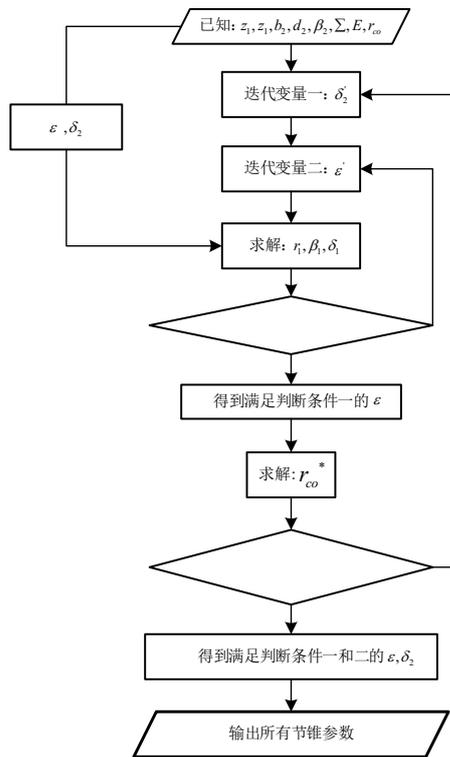


图3 节锥参数的迭代求解方法

令 $n = K_1P / K_1K_2$, $1 - n = K_2P / K_1K_2$, 由三角形相似的关系, 可得

$$r_1 = n \cdot K_1B_2 \quad (21)$$

$$r_2 = (1 - n) \cdot K_2B_1 \quad (22)$$

与式 (1) 联立, 可得

$$n = \frac{z_1K_1B_2 \cos \beta_2}{z_2K_2B_1 \cos \beta_1 + z_1K_1B_2 \cos \beta_2} \quad (23)$$

$$r_1 = \frac{z_1K_1B_2 \cos \beta_2 K_1B_2}{z_2K_2B_1 \cos \beta_1 + z_1K_1B_2 \cos \beta_2} \quad (24)$$

$$r_1 = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2}} \quad (25)$$

$$r_2 = \frac{z_2 K_2 B_1 \cos \beta_1 K_2 B_1}{z_2 K_2 B_1 \cos \beta_1 + z_1 K_1 B_2 \cos \beta_2} \quad (26)$$

$$r_2 = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2}} \quad (27)$$

大端节圆直径 d_2 为已知条件, 大轮基本强度关系如图 4 所示, 由图可得

$$r_2 = \frac{1}{2}(d_2 - b_2 \sin \delta_2) \quad (28)$$

联立式 (27) 与式 (28), 可建立以下等式, 该等式中只含 K_1C_1 与 K_2C_2 两个未知量。

$$\frac{1}{2}(d_2 - b_2 \sin \delta_2) = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2}} \quad (29)$$

根据上述表达式可知, 节锥参数如 δ_1 , δ_2 , r_1 , r_2 , ϵ' , β_2 等的表达式仅涉及两个未知量 K_1C_1 , K_2C_2 。因此, 只需知道 δ_1 , δ_2 , r_1 , r_2 , ϵ' , β_2 中任意一个参数的值, 并将其与式 (29) 联立求解, 便可确定 K_1C_1 , K_2C_2 的值, 从而计算出其余节锥参数。直接计算法的两个求解方程可表示为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(d_2 - b_2 \sin \delta_2) = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2}} \\ \delta_1 = \arctan \frac{K_1B_1}{K_2B_1} \end{cases} \quad (30)$$

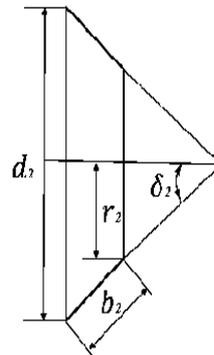


图4 大轮强度条件示意图

3 算例

3.1 通过小轮节锥角确定节锥参数

由式 (13) 和式 (14) 可知, 小轮节锥角也可以通过 K_1C_1 , K_2C_2 表达, 如果在设计初期已知小轮节锥角, 则可以通过以下方程组求解节锥参数

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(d_2 - b_2 \sin \delta_2) = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1C_1 \sin(\Sigma))^2}} \\ \delta_1 = \arctan \frac{K_1B_1}{K_2B_1} \end{cases} \quad (31)$$

通过求解这组方程, 可以得到对应的节锥参数。以两组准双曲面齿轮为算例对方程进行求解验证。

算例一的已知参数:

$$\Sigma = 15^\circ, \quad d_2 = 133.7, \quad b_2 = 32, \quad \beta_1 = 29.69, \\ E = 35, \quad z_2 = 39, \quad z_1 = 27, \quad \delta_1 = 6.833$$

算例二的已知参数:

$$\Sigma = 90^\circ, \quad d_2 = 194.7, \quad b_2 = 28, \quad \beta_1 = 50, \\ E = 31.8, \quad z_2 = 41, \quad z_1 = 10, \quad \delta_1 = 15.225$$

分别通过迭代计算方法和基于小轮节锥角确定节锥参数的直接计算法计算以上两算例的节锥参数, 其计算结果分别如表 1 和表 2 所示。

表 1 两种方法计算算例一节锥参数的对比结果

节锥参数	迭代法	直接计算法
r_o	152.4	152.51
d_2	133.7	133.7
δ_1	6.833	6.833
δ_2	7.418	7.419
r_1	46.792	46.792
r_2	64.784	64.784
β_1	29.692	29.69
β_2	25	24.997
ε'	4.693	4.693

表 2 两种方法计算算例二节锥参数的对比结果

节锥参数	迭代法	直接计算法
r_o	95.25	95.25
d_2	194.7	194.7
δ_1	15.225	15.225
δ_2	73.74	73.74
r_1	27.84	27.84
r_2	83.884	83.884
β_1	50	50
β_2	29	28.999
ε'	29	28.99

从结果可以看出, 基于小轮节锥角确定节锥参数的直接计算法所得到的节锥参数, 与迭代计算法所得结果几乎完全一致。

3.2 通过极限齿线曲率半径确定节锥参数

采用刀倾半展成法加工的齿轮对具有特殊的成形特点, 大轮齿廓的加工过程省去了传统的滚齿工序, 其最终齿形曲面与刀具切削面保持完全一致的几何形状, 因此齿形曲面与节平面相交所形成的轮廓曲线表现为一段具有特定半径的圆弧 r_{co} , 同时该圆弧半径也为该齿面的极限曲率半径。由此, 齿面的极限曲率半径 r_o 就可以近似等于刀盘半径 r_{co} 。节锥参数常用的迭代法通过数值逼近方法进行计算求解节锥参数, 判断迭代是否通过的条件为 $|1-r_o/r_{co}| \leq 0.01$, 并在每次运算中动态修正轴截面偏置角, 经过多次迭代后得到结

果。然而, 这种方法获得的节锥参数具有一定程度的近似性。而节锥参数的直接计算可以得到精确解。

齿面的极限曲率半径 r_o 可由下式表示

$$r_o = \frac{\tan \beta_1 - \tan \beta_2}{e - W \tan \alpha_{lim}} \quad (32)$$

其中, e 和 W 为辅助参数, 表达式如下

$$e = \frac{\sin \delta_1}{r_1 \cos \beta_1} - \frac{\sin \delta_2}{r_2 \cos \beta_2} \quad (33)$$

$$W = \frac{\tan \beta_1 \cos \delta_1}{r_1} - \frac{\tan \beta_2 \cos \delta_2}{r_2} \quad (34)$$

由式 (32) 可以看出, 极限曲率半径 r_o 也是仅含 $K_1 C_1$, $K_2 C_2$ 两个未知量的表达式, 此时, 直接计算法的两个求解方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(d_2 - b_2 \sin \delta_2) = \frac{z_1 \cos \beta_2 (E^2 + (K_2 C_2 \sin(\Sigma))^2)}{z_2 \sqrt{E^2 + (K_2 C_2 \sin(\Sigma))^2} \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2 \sqrt{E^2 + (K_1 C_1 \sin(\Sigma))^2}} \\ r_o = r_{co} \end{cases} \quad (35)$$

通过求解这组方程, 可以得到对应的节锥参数。以两组准双曲面齿轮为算例对该方程进行求解验证。

算例三已知参数:

$$\Sigma = 45^\circ, \quad d_2 = 182.3, \quad b_2 = 23, \quad \beta_1 = 50, \\ E = 20, \quad z_2 = 30, \quad z_1 = 12, \quad r_{co} = 95.25$$

算例四已知参数:

$$\Sigma = 90^\circ, \quad d_2 = 156.1, \quad b_2 = 22.3, \quad \beta_1 = 56.5, \\ E = 29, \quad z_2 = 72, \quad z_1 = 6, \quad r_{co} = 63.5$$

分别通过迭代法和基于极限齿线曲率半径的直接计算法分别计算节锥参数, 其计算结果分别如表 3 和表 4 所示。

表 3 两种方法计算算例三节锥参数的对比结果

节锥参数	迭代法	直接计算法
r_o	95.25	95.25
d_2	182.3	182.3
δ_1	15.895	15.896
δ_2	28.598	28.597
r_1	38.971	38.972
r_2	85.68	85.681
β_1	50	50
β_2	43.03	43.035
ε'	6.956	6.965

表 4 两种方法计算算例四节锥参数的对比结果

节锥参数	迭代法	直接计算法
r_o	63.501	63.5
d_2	156.1	156.1
δ_1	5.775	5.775
δ_2	83.61	83.61
r_1	8.655	8.658
r_2	66.969	66.969
β_1	56.47	56.5
β_2	31.07	31.07
ε'	25.3	25.27

可以看到, 通过极限齿线曲率半径确定节锥参数的直接计算法求得的节锥参数和迭代方法得到的节锥参数几乎完全一致。这表明, 直接计算法在节锥参数的求解中能够与传统的迭代方法达到相同的精度, 同时简化了计算过程, 具有较高的计算效率。

3.3 节锥的演化规律

由 2 节可以知道, 所有的节锥参数都可以表示为包含 K_1C_1 , K_2C_2 的表达式。进一步地, 根据式 (29), 可以推导出 K_1C_1 和 K_2C_2 之间的关系。基于此, 可选择 K_1C_1 或者 K_2C_2 为自变量, 并设定其取值范围为从零至正无穷, 从而推导出相应的 K_2C_2 或者 K_1C_1 的取值范围, 并揭示其他节锥参数随着 K_1C_1 , K_2C_2 变换的演化规律。以 3.2 节的 $z_1/z_2 = 6/72$, 轴交角 $\Sigma = 90$ 度的准双曲面齿轮为例, 以 K_2C_2 为自变量, 定义其取值范围为零到正无穷, 以 K_1C_1 为横坐标, 得到的各节锥参数随 K_2C_2 变化时的演化规律如图 5 所示。

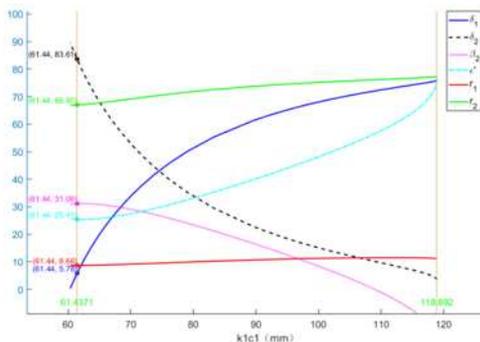


图 5 节锥演化规律

可以看到, 当 K_2C_2 的取值范围为零到无穷大时, K_1C_1 的值从 118.892mm 变化到 60.37mm。纵坐标分别表示小轮节锥角 δ_1 , 大轮节锥角 δ_2 , 大轮螺旋角 β_2 , 小轮节

圆半径 r_1 , 大轮节圆半径 r_2 等节锥参数随 K_1C_1 变换的演变规律。图中垂直虚线表示在极限齿线曲率半径为 61.437 时的节锥参数值, 垂直虚线与各节锥参数曲线的交点值与 3.2 节中通过直接计算法得到的结果几乎一致, 从而也验证了该变化规律的正确性。

4 结语

建立了一种适用于任意轴交角的准双曲面齿轮节锥参数的直接计算方法, 该方法以节锥几何中两条边 K_1C_1 , K_2C_2 为未知量, 建立非线性方程组, 其中第一个方程基于大轮强度条件建立, 第二个方程则通过 δ_1 , δ_2 , r_1 , r_2 , ε' , β_2 中任一节锥参数的几何关系建立, 联立这两个方程可求解 K_1C_1 , K_2C_2 的值, 进而确定所有节锥参数。随后, 以小轮节锥角和极限齿线曲率半径为已知条件, 分别建立第二个方程, 计算了四组准双曲面齿轮副的节锥参数, 计算结果与传统迭代法所得结果高度一致, 验证了所提方法的准确性和可行性。

参考文献:

- [1] Wildhaber E. Gear tooth curvature treated simply[J]. American Machinist, 1945, v 89(n 18): p122-125.
- [2] Wildhaber E. Basic relationship of hypoid gears[J]. American Machinist, 1946, v 90(n 4-6, 12-13, 15-17): Various pages.
- [3] Litvin F L, Fuentes A. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge university press, 2004.
- [4] 吴训成, 胡宁, 陈志恒. 准双曲面齿轮几何设计研究[J]. 机械设计与研究, 2005, (01): 44-46
- [5] Zhang B, Wei B, Zhang R. Research on evolution laws of pitch cones and characteristic values on whole tooth surface of hypoid gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 174: 104915.
- [6] Liu S, Zhu C, Fuentes-Aznar A, et al. Computerized determination of the qualified region of main design parameters of face-milled hypoid gears with low shaft angle[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 159: 104259.

作者: 陈磊; 性别: 男; 出生年月: 2000年5月; 民族: 汉族; 籍贯: 四川; 学历: 硕士; 研究方向: 高性能机电传动