基于合作博弈与优化的水电分配

姚慧雅　廖梓喻　雷　杰　章　杰
南华大学　湖南衡阳　421000

摘　要：连续的干旱已经严重威胁到美国五大洲及科罗拉多河流域附近居民正常的生活。本文专注于优化鲍威尔湖和米德湖往五大洲AZ、CA、WY、NM和CO的供水供电损耗最少，时间最短的问题，并考虑在人口、农业和工业增长时，模型会呈现出什么变化。

关键词：水力分配；关联优化模型；合作博弈；优化模型

Hydropower Distribution Based on Cooperative Game and Optimization

Huiya Yao, Ziyu Liao, Jie Lei, Jie Zhang
University Of Nanhua, Hengyang, Hunan, 421000

Abstract: The continuous drought has seriously threatened the normal life of the residents on the five continents of the United States and near the Colorado River basin. This paper focuses on optimizing the problems of minimal water supply loss and the shortest time for Lake Powell and Lake Mead to AZ, CA, WY, NM, and CO, and considers what changes the model presents during population, agriculture, and industrial growth.

Keywords: hydraulic distribution; correlation optimization model; cooperative game; optimization model

1　内容背景

由于降雨量减少和城市人口激增，鲍威尔湖和米德湖由于过度开发和干旱，水位线不断降低。由于流入湖内的水量一直很少，到2015年4月，鲍威尔湖的储水量只有其正常状态下的42%。截至2021年9月20日，鲍威尔水库中的蓄水量仅为设计水量的30%，为了补偿鲍威尔水库的水量，科罗拉多河管理局开始在上游水库放水，以免水位继续下降，从而威胁到水电站的运行与发电。

在科罗拉多河下游的米德湖，目前的水量仅为设计容量的35%，而整个科罗拉多河的蓄水量仅为正常值的39%。950ft（约290米）是胡佛大坝能发电的最低水位，而目前米德湖的水位已经低至1067ft（约325米）。自从20世纪30年代胡佛大坝建成以来，水位从未如此之低，米德湖现在的蓄水量仅为其正常容量的34%。它最近一次接近正常蓄水是2000年，从那时起，美国西南大部分地区就陷入了持续的干旱。

根据2015年现有的数据，我们建立优化模型，如果没有降水、冰山融雪，甚至还是持续高温干旱，不用一年时间，鲍威尔湖和米德湖的水将会全部消耗殆尽。我们的模型还可以计算出往五大洲供应的最优水量和最优电量，来使得供应的水量损耗量最少。

2　模型分析

由于鲍威尔湖位于米德湖的上游，鲍威尔湖也会向米德湖进行供水，假设AZ、CA、WY、NM和CO五个州的需求为M_1、M_2、M_3、M_4和M_5。那么设米德湖的需求为M_6。鲍威尔湖和米德湖的上表面积为S_1和S_2，题目中两个湖的平均水位是P和M。即鲍威尔湖的蓄水量为$I_1 = P \cdot S_1$；米德湖的蓄水量为$I_2 = M \cdot S_2$。由于当两个湖的水位过低时，两个湖将停止供水，假设两个湖的最低水位为P_1和m，有四种情况，当P和M低于P_1和M_1时，两个湖将停止供水。当P和M均高于最低水位P_1和m时，或者P高于最低水位线P_1，M低于最低水位线m，将此问题转化成一个2×6的矩阵：

	AZ	CA	WY	NM	CO	米德湖	供给
鲍威尔湖	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	$S_1(P-P_1)$
米德湖	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	0	$S_2(M-m)$
需求	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	

在美国地图上大致找到这五个州以及这两个湖的位

置和流向五大洲的一些主要河道，并建立目标函数和约束条件：

2.1 目标分析

由于五大洲急需供水，那么鲍威尔湖和米德湖需要尽可能快的往五大洲输水，假设水的流速是平稳不变的，且第i个湖往第j个州供水的路程为d_{ij}，优化的目标就是送水损耗量最少和送水时间最短，转换成总路程越短，即时间就越短、损耗最少。此外又因为水在被五大洲使用后会流向墨西哥，题目中也要求我们的模型要解决墨西哥的权益，所以要考虑在满足五大洲的需求后使墨西哥的权益最大，也就是使两大湖往五大洲的供水量最少，其目标表达式为$\min\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6}d_{ij}\cdot x_{ij}$。

2.2 约束条件分析

2.2.1 根据题目所给信息，首先就是要满足五个州的用水需求，设第i个湖给第j个州供应x_{ij}的水量，即

$$\sum_{i=1}^{2}x_{ij}\geq M_j\text{ , j=1、2、3……6;}$$

2.2.2 鲍威尔湖给五大洲供应的水不能大于其最大供水量，即

$$\sum_{j=1}^{6}x_{1j}\leq(P-P_1)\times S_1\ .$$

2.2.3 同样，米德湖给五大洲供应的水不能大于其最大供水量，即

$$\sum_{j=1}^{5}x_{2j}\leq(M-m)\times S_2\ .$$

即问题1建立的模型如下：

$$\min\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6}d_{ij}\times x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}x_{ij}\geq M_j\\ \sum_{j=1}^{6}x_{1j}\leq(P-P_1)\times S_1\\ \sum_{j=1}^{5}x_{2j}\leq(M-m)\times S_2\end{cases}.$$

3 连锁供应

假设第一天，两个湖有较充足的水量，能很好得供应五个州时，米德湖就不需要鲍威尔湖供水，那么米德湖的需求量为0。

随着时间推移，由于没有降雨等方式给鲍威尔湖和米德湖以及五大洲进行供水，两大湖里的水将会慢慢减少，直到有一天将无法满足五大洲基本的用水需求。

当第t天，米德湖的水位降低至无法满足其输送水的州的需求甚至是水位线已经降低至其供水的最低水位线无法继续供水时，鲍威尔湖需要就开始往米德湖送水，米德湖的需求就不再为0，此时模型中将加入一条约束条件：

鲍威尔湖给米德湖供应的水量应该使其过其最低水位线m且要满足其在湖水满足的情况下的供应五大洲的最优水量，但供应的水量不能使自身水位低于其自身最低水位线S_1，即

$$\sum_{j=1}^{5}x_{2j}\leq M_6+(M\text{-}m)\times S_2\text{-}\sum_{j=1}^{5}\sum_{t=1}^{t}x_{2j}\leq P_1\cdot S_1\ .$$

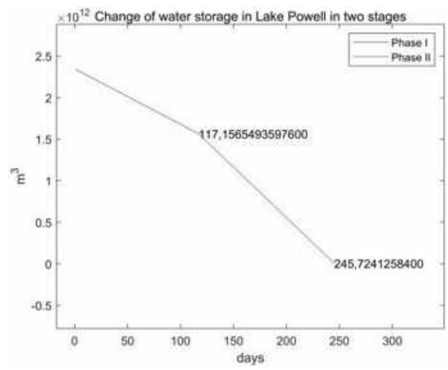
随着时间继续推进时，一遍又一遍重复以上的模型往五大洲进行供水，直到第n天，鲍威尔湖和米德湖没办法再满足五大洲的需求时，就需要提供额外的水量Q_q来满足其需求。提供的额外的水量为五大洲的总需求Q_s减去两个湖最后剩下的水量Q_k，即

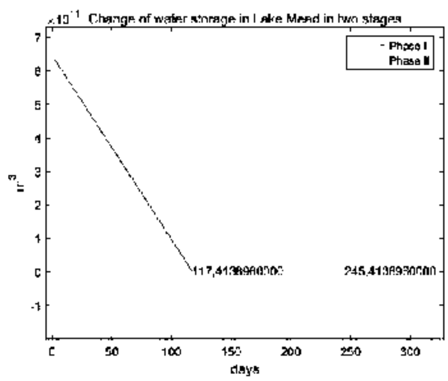
$$Q_q=Q_s\text{-}Q_k\ .$$

当两个湖完全没水供应时，那么额外提供的水量完全就是五大洲的需求总量Q_s，即

$$Q_q=Q_s$$

通过寻找以往的历史数据，利用Matlab自带的优化工具箱和循环迭代，绘制出两个湖在整个周期的的剩余水容量变化曲线，如下图所示。大致在一年以内，两个湖将没办法继续供应五个州的用水需求。





根据查找信息资料带入数据解上述模型得

在第一阶段，鲍威尔湖和米德湖均有足够的蓄水量时，鲍威尔湖供应科罗拉多州、怀俄明州和新墨西哥州三个州，供应水量大致为2801200000、552700000和

当代水利水电：2022年4卷6期
ISSN: 2705-1005(Print); 2705-0491(Online)

3331200000km^3，米德湖供应亚利桑那州和加利福尼亚州，供应水量大致为1211300000和4277500000km^3，得到的结果与现有资料记载的实际情况基本相符，持续供应的天数大致为116天。

在第二阶段，当米德湖没有足够的水时，鲍威尔湖开始往米德湖开始供水，优化后的结果变为鲍威尔湖供应科罗拉多州、怀俄明州、新墨西哥州和米德湖，供应的水量大致为2801200000、552700000、3331200000和5488800000km^3，米德湖供应亚利桑那州和加利福尼亚州，供应的水量大致为1211300000和4277500000km^3，持续供应的天数大致为128天。

在第三阶段，鲍威尔湖也没有足够的水时，鲍威尔湖和米德湖在第245天时两个湖剩余水量大致为7241300000和4139000000km^3，还无法满足五大洲的用水总需求12173900000km^3，还需额外供应793600000km^3。

此外，通过建立合作博弈竞争模型，我们还可得到居民用水、农业供水、农业供电和工业供电之间的变动关系。通过此变动关系，可以推算出：对工业供电增加，可以在一定程度上缓解干旱。当水资源不足时，在保障居民用水的前提下，我们应该大力发展工业，增加工业用电量。

考虑到每个州农业、工业和居民用水情况均不相同，本文根据水库调水-供水规则标准和实际情况，通过动态博弈来解决工业和农业对水的竞争。博弈论主要研究两个或者两个以上有利益相关的决策主体如何通过各自优化决策从而使得自身利益最大化的理论。博弈论与其他优化理论区别在于参与者之间的决策具有相互作用，某一参与者的决策受其他参与者的影响，也会影响其他参与者。

4 合作博弈

4.1决策顺序界定依据。动态博弈中的博弈者按照一定的顺序依次采取行动。本文中居民用水用电、工业用水用电和农业用水用电是有优先级考虑的。根据World Health Organization报道中明确了“…the highest attainable standard of health as a fundamental right of every human being.” 此外Professor Bill Bowtell，a strategic health policy consultant at the University of New South Wales also said：“Lives more important than economy.”各国法律中也首先保障公民的人身健康权，所以居民用水用电是首先需要保证的，即

Residential water >>>Agricultural water;

Residential water >>>Industrial water;

4.2决策集界定。而每个州经济发展情况和供水供电优先级规则不同，在供水量供电量和居民用水用电一定的情况下，根据农业和工业对该州产生的经济价值不同，对农业和工业的用水用电竞争依据对州产生的经济价值来决策分配。通过合作博弈来调节工业和农业之间的用水用电量，两者相当于一个结盟者，不断调节两者的用水用电量，使得创造出的经济价值最大化。

4.3假设居民用水为Q_1，农业用水为Q_2，工业用水为Q_3，居民用电y_1，农业用电y_2，工业用电y_3。

a、饱和性供水供电，即如果$Q \geq Q_1+Q_2+Q_3$，$y > y_1+y_2+y_3$时，两个湖的供水供电充足的情况下，农业、工业之间就不存在博弈竞争。

b、限制性供水供电，如果$Q=Q_1$，$y=y_1$时，两个湖的供水供电只能满足居民用水用电的情况下，就必须限制农业和工业用水用电，农业与工业之间分到的水和分到的电均为0，两者之间也不存在博弈竞争。

c、竞争性供水供电，如果$Q<Q_1+Q_2+Q_3$，$y<y_1+y_2+y_3$时，在满足居民用水用电的条件下，农业和工业对剩余的水和剩余的电存在博弈竞争。由于每个州对农业和工业的重视程度不同，存在一方先行动，一方后行动的博弈，这也称为斯坦克伯格问题，也可称为主从博弈（leader and follower），Stackelberg是一个动态的过程。主从博弈中的参与者的地位是不一致的，跟随者的策略选择依赖于领导者的策略选择，Stackelberg game存在一个均衡的情况。

4.4假设对农业和工业供水供电产生的价值S_1、S_2呈边际报酬递减规律，近似呈柯布-道格拉斯生产函数，随着农业用水Q_2和用电y增加，农业产生的边际价值先增后减。即，$S=a\cdot Q_2^{\alpha}\cdot y^{\beta}$。（α 和 β 是次方）

若：$\alpha+\beta>1$，则规模报酬递增；

$\alpha+\beta=1$，则规模报酬不变；

$\alpha+\beta<1$，则规模报酬递减。

（i_1）首先对农业、工业用水进行考虑：

随着对农业供水的增加，

$TS_1=a\cdot Q_2^{\alpha}\cdot y^{\beta}$（对农业供水供电产生的总价值）

$TS_2=b\cdot Q_3^{K}\cdot y^{l}$（对工业供水供电产生的总价值）

$TS_{total}=TS_1+TS_2=a\cdot Q_2^{\alpha}\cdot y^{\beta}+b\cdot Q_3^{k}\cdot y^{l}$（对农业、工业供水产生的总价值）

$$TS_{total}=a\cdot Q_2^{\alpha}\cdot y^{\beta}+b\cdot(Q-Q_1-Q_2)^{k}.y^{l}$$
$$Q=Q_1+Q_2+Q_3$$
$$MS=\frac{\partial TS_{total}}{\partial Q_2}=a\cdot\alpha\cdot Q_2^{\alpha-1}\cdot y^{\beta}+(-bk)(Q-Q_1-Q_2)^{k-1}\cdot y^{l}=0$$

（边际价值，即一单位的水能产生多少收益）

为了使得一单位的水对该州产生的价值最大，即要使MS=0时，求解出Q_2，知道需要给农业供水量Q_2后，就可以解出给工业供水量$Q_3=Q-Q_1-Q_2$，只要在已知常量的值后，满足该等式，对农业、工业供水量达到均衡点。

（i_2）对农业、工业供电也是一样的思路，参照上述步骤继续建立合作博弈模型。

$TS_1 = a \cdot Q_2^{\alpha} \cdot y^{\beta}$（对农业供水供电产生的价值）

$TS_2 = b \cdot Q_3^{K} \cdot y^{l}$（对工业供水供电产生的价值）

$TS_{total} = TS_1 + TS_2 = a \cdot Q_2^{\alpha} \cdot y^{\beta} + b \cdot Q_3^{k} \cdot y^{l}$（对农业、工业供电产生的总价值）

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$TS_{total} = a \cdot Q_2^{\alpha} \cdot y^{\beta} + bQ_3^{k} \cdot (y - y_1 - y_2)^{l}$$

$$MS = \frac{\partial TS_{total}}{\partial y_2} = a \cdot \beta \cdot Q_2^{\alpha-1} + (-bl) \cdot Q_3^{k} \cdot (y - y_1 - y_2)^{l-1}$$

（边际价值，即一单位的电能产生多少收益）

为了使一单位的电对该州产生的价值最大，即要使MS=0时，知道需要给农业供电量y_2后，就可以解出工业供电量$y_3=y-y_1-y_2$，同样，在已知常量的数值以后，满足上述等式，对农业、工业供电量达到均衡点。

利用Matlab的Solve函数进行逻辑运算，我们解出了居民用水Q_1的公式：

$$Q1 = Q - Q_2 - \left(\frac{Q_2^{\alpha-1} a \alpha y^{\beta}}{bky^{l}} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$(l \le 0 \vee y \ne 0) \wedge \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) \notin Z \wedge \left(0 < \frac{Q_2^{\alpha-1} a \alpha y^{\beta}}{bky^{l}}\right) \wedge \left(\frac{Q_2^{\alpha-1} a \alpha y^{\beta}}{bky^{l}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \in R$$

根据这个式子我们知道了居民用水Q_1和农业用水Q_2之间存在的关系，即对农业增加一单位的供电会导致居民用水增加，而对工业增加一单位的供电则会减少居民用水。所以当水资源不足时，还要首先保障居民用水时，我们应该大力发展工业，限制农业的用水量。

此外，如果没有足够的水来满足所有的水和电力需求时，那么各州的经济发展将会受到很大的限制，尤其是以农业为主的州，其创造的经济价值将会减少。由此来说，当发生水应该先限制农业用水再限制工业用水，工业创造出的价值远远大于农业创造出来的价值。

若是给农业供水量不变时，人口增长肯定会增加居民用水，那么首先就会限制工业用电量。那么，工业创造出的经济价值将会大大减少。该州的经济不仅会受到很大的打击，居民用水量也会增加，更会加剧干旱。所以地方政府在人口增长时应该减少对农业供水，保障工业用电。

后续影响：

·若是限制农业用水，那么农村地区灌溉的水资源肯定受到限制，导致农民收入减少，粮食产量下降，甚至导致粮价的波动。

·若是再生能源技术不进步，各大洲因为水资源分配问题纠纷会越来越多。

·通过上述模型的推导，可以发现人口增长而不减少对农业的供水，那么对工业的供电将会减少，工业将会遭受到很大的影响。

参考文献：

[1] Liu Xiaofeng, GAO Bingtuan, Li Yang. Power grid technology,2018,42(08):2704-2711.DOI: 10.13335/j.1000-3673.pst.2018.0039.

[2] Dinar A , Hogarth M . Game Theory and Water Resources Critical Review of its Contributions, Progress and Remaining Challenges[J]. Foundations and Trends(R) in Microeconomics, 2 015, 11(1-2):1-139.

[3] Wang Zongzhi, Tan Liting, Geng Min, Liu Kelin. Considering the rules of water diversion an d water supply reservoir optimal operation [J/OL]. Water conservation: 1-11[2022-02-21].http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1356.TV.20220217.0958.002.html

[4] Parrachino I , Dinar A , F Patrone. Cooperative game theory and its application to natural, environmental, and water resource issues : 1. basic theory[J]. Policy Research Working Paper Series, 2006, 33(11):1-46(46).

[5] Wang Liying, Chen Jun. Analytic hierarchy model of water resources reasonable allocation problem [J]. Journal of tonghua normal university, 2014, 35 (10) : 34-36. DOI: 10.13877 / j.carol carroll nki cn22-1284.2014.10.011.

[6] USGC.[National Water Information System:MapView].[EB/OL].(2022-2-19)[2022-2-19].https://maps.waterdata.usgs.gov/mapper/nwisquery.html?URL=https://waterdata.usgs.gov/co/nwis/current?type=flow&group_key=huc_cd&format=sitefile_output&sitefile_output_format=xml&column_name=agency_cd&column_name=site_no&column_name=station_nm&column_name=site_tp_cd&column_name=dec_lat_va&column_name=dec_long_va&column_name=agency_use_cd.